

I.

〔解答〕

1)

|     |                     |     |                                 |     |      |
|-----|---------------------|-----|---------------------------------|-----|------|
| (a) | $a_2 = 3, b_2 = -2$ | (b) | $a_n = 2^n - 1, b_n = -2^n + 2$ | (c) | 1892 |
|-----|---------------------|-----|---------------------------------|-----|------|

2)

|     |                   |     |                  |     |         |
|-----|-------------------|-----|------------------|-----|---------|
| (a) | $(a^2 + a + 1)^2$ | (b) | $x^2 + xy + y^2$ | (c) | 4038361 |
|-----|-------------------|-----|------------------|-----|---------|

3)

|                 |
|-----------------|
| $\frac{33}{91}$ |
|-----------------|

〔解説〕

1) (a)(b)

$$\begin{aligned}x^n &= Q(x)(x^2 - 3x + 2) + a_n x + b_n \\&= Q(x)(x - 2)(x - 1) + a_n x + b_n \quad (Q(x) \text{ は } x \text{ の整式とする})\end{aligned}$$

と表せる。

$$\begin{cases} 2^n = 2a_n + b_n & (x = 2) & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 1 = a_n + b_n & (x = 1) & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

となるから、 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より、

$$a_n = 2^n - 1$$

となり、これを $\textcircled{2}$ に代入して、

$$b_n = -2^n + 2$$

となる。よって

$$\begin{aligned}a_2 &= 2^2 - 1 = 3 \\ b_2 &= -2^2 + 2 = -2\end{aligned}$$

となる。

(c)

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{10} |b_n + 30| &= \sum_{n=2}^{10} |32 - 2^n| \\&= \sum_{n=2}^5 (32 - 2^n) + \sum_{n=6}^{10} (2^n - 32) \\&= 4 \cdot 32 - \sum_{n=2}^5 2^n + \sum_{n=6}^{10} 2^n - 5 \cdot 32 \\&= -32 - 2^2(2^4 - 1) + 2^6(2^5 - 1) \\&= -32 - 4 \cdot 15 + 64 \cdot 31 \\&= 1892\end{aligned}$$

となる。

(2)(a)

$$\begin{aligned}a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 &= (a^2 + 1)^2 + 2a(a^2 + 1) + a^2 \\&= \{(a^2 + 1) + a\}^2 \\&= (a^2 + a + 1)^2\end{aligned}$$

となる。

(b)

$$\begin{aligned}x^2 + xy + y^2 &= \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0 \text{ であるから,} \\ \sqrt{\frac{x^4 + y^4 + (x + y)^4}{2}} &= \sqrt{x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4} \\&= \sqrt{y^4 \left\{ \left(\frac{x}{y}\right)^4 + 2\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) + 1 \right\}} \\&= \sqrt{y^4 \left\{ \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1 \right\}^2} \\&= \sqrt{(x^2 + xy + y^2)^2} \\&= x^2 + xy + y^2\end{aligned}$$

となる。

(c)

(c)で  $x = 2000, y = 19$  を代入して、

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2000^4 + 19^4 + 2019^4}{2}} &= 2000^2 + 2000 \cdot 19 + 19^2 \\&= 4038361\end{aligned}$$

と計算できる。

(3)

5番目に身長の高い人が準決勝に進出するのは、その人のいる準決勝進出のための4人のブロックで、その人が最も身長が高い時である。すなわちあとの3人が6番目以下の身長である確率を求めればよい。よって求める確率は、

$$\frac{{}_{11}C_3}{{}_{15}C_3} = \frac{\frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{33}{91}$$

となる。

## II

1)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$  とおくと、

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

となり、 $a > 0, b > 0$  より、 $x > 0$  のとき  $f'(x) > 0$  とわかる。よって、 $1 \leq x \leq 2$  で  $f(x)$  は単調増加となる。したがって、 $1 \leq x \leq 2$  のとき、 $1 \leq y \leq 2$  となる条件は、

$$1 \leq f(1) \text{ かつ } f(2) \leq 2$$

である。

$$f(1) = a + b + 1$$

$$f(2) = 8a + 4b + 1$$

となるから、求める条件は、

$$1 \leq a + b + 1 \text{ かつ } 8a + 4b + 1 \leq 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq a + b \text{ かつ } 8a + 4b \leq 1$$

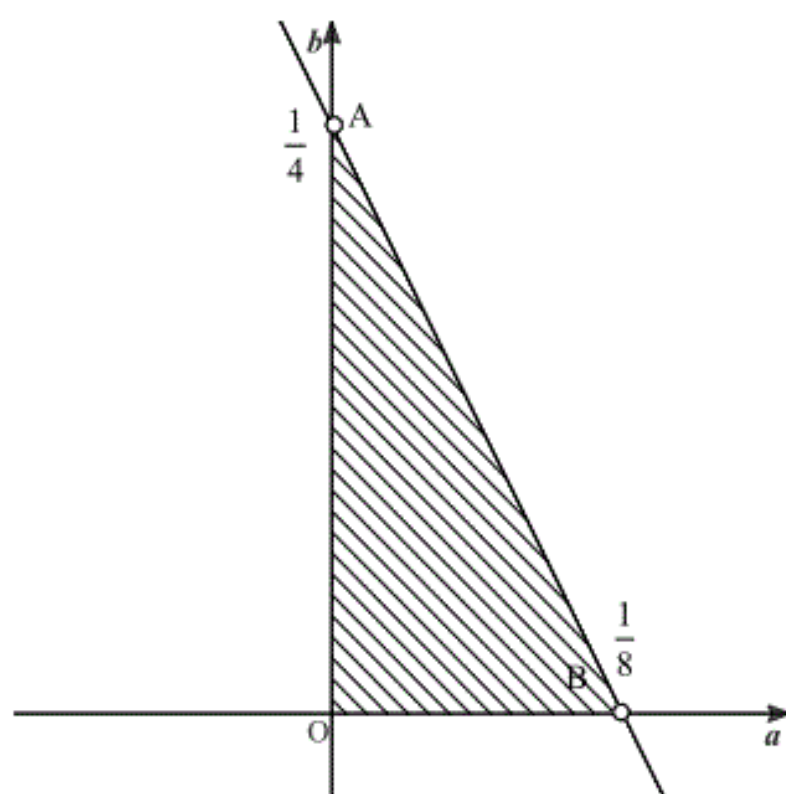
$$\Leftrightarrow 8a + 4b \leq 1 \quad (\because a > 0, b > 0 \text{ より, } 0 \leq a + b) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。

(答)  $8a + 4b \leq 1$

2)

$a > 0, b > 0, 8a + 4b \leq 1$  を満たす点  $(a, b)$  の集合を図示すると以下のようになる。ただし、点 A, B を除いた線分 AB 上のみ境界は含む。



$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 (ax^3 + bx^2 + 1) dx \\ &= \left[ \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + x \right]_1^2 \\ &= 4a + \frac{8}{3}b + 2 - \frac{a}{4} - \frac{b}{3} - 1 \\ &= \frac{15}{4}a + \frac{7}{3}b + 1 \end{aligned}$$

であるから、 $I$  の取りうる値の範囲は、 $\frac{15}{4}a + \frac{7}{3}b + 1 = k$  ( $k$ : 実数) とおくと、この直線 ( $l$  とする) が上図の斜線部分と交点を持つような  $k$  の値の範囲になる。ここで  $l$  が点 B を通るとき、

$$k = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{4} + 1 = \frac{19}{12}$$

である。また  $l$  が点 O を通るとき、

$$k = 1$$

である。今  $l$  の傾きは、

$$-\frac{\frac{15}{4}}{\frac{7}{3}} = -\frac{45}{28} > -2 \quad (= \text{直線 AB の傾き})$$

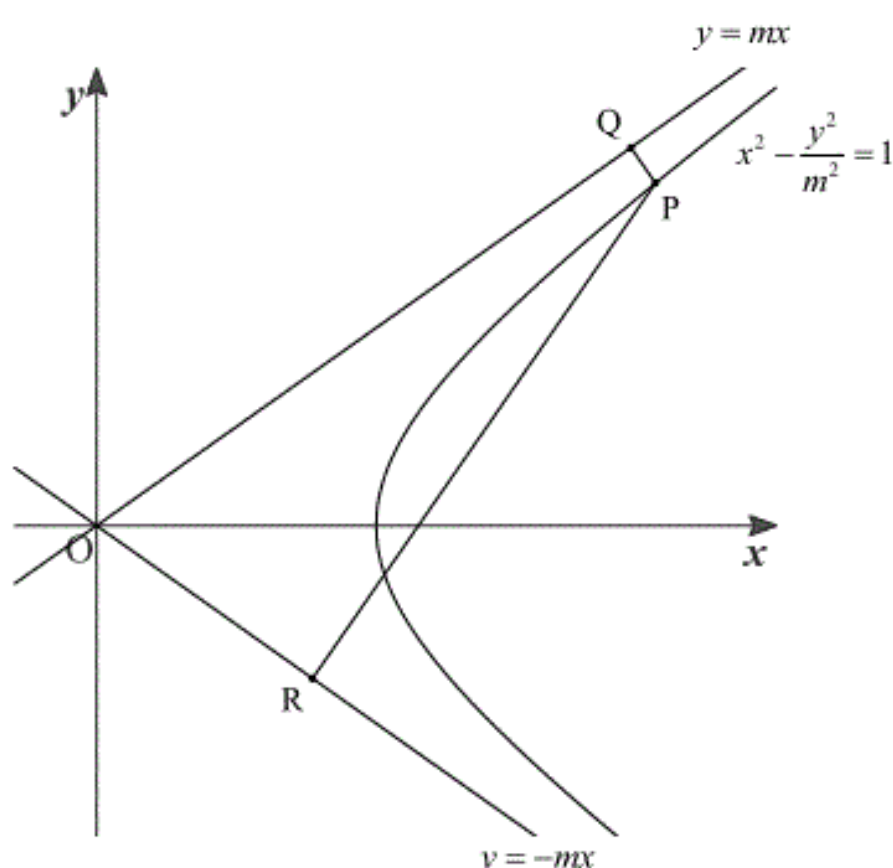
であるから、上図より  $I$  の取りうる値の範囲は、

$$1 < I < \frac{19}{12}$$

である。

(答)  $1 < I < \frac{19}{12}$

### Ⅲ



1)

双曲線の漸近線は公式より、 $y = \pm mx$  である。 $Q(q, mq)$ ,  $R(r, -mr)$  とおく。 $PQ \perp OQ$ ,  $x_1 \neq q$  より、

$$\begin{aligned} \frac{y_1 - mq}{x_1 - q} \cdot m &= -1 \\ \Leftrightarrow my_1 - m^2 q &= q - x_1 \\ \Leftrightarrow (m^2 + 1)q &= x_1 + my_1 \\ \Leftrightarrow q &= \frac{x_1 + my_1}{m^2 + 1} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。また、同様に  $PR \perp OR$ ,  $x_1 \neq r$  より、

$$r = \frac{x_1 - my_1}{m^2 + 1} \quad (\textcircled{1} \text{ において } m \text{ を } -m \text{ とした。})$$

よって、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= \begin{pmatrix} q - x_1 \\ mq - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m(y_1 - mx_1)}{m^2 + 1} \\ \frac{mx_1 - y_1}{m^2 + 1} \end{pmatrix} = \frac{y_1 - mx_1}{m^2 + 1} \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{PR} &= -\frac{y_1 + mx_1}{m^2 + 1} \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\overrightarrow{PQ} \text{ において、} m \text{ を } -m \text{ とした。}) \end{aligned}$$

とわかる。よって、求める面積  $S$  は、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 \cdot |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \left( \frac{y_1 - mx_1}{m^2 + 1} \right)^2 (m^2 + 1) \cdot \left( -\frac{y_1 + mx_1}{m^2 + 1} \right)^2 (m^2 + 1) - \left\{ -\frac{y_1^2 - m^2 x_1^2}{(m^2 + 1)^2} (m^2 - 1) \right\}^2 \right\}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \frac{y_1^2 - m^2 x_1^2}{(m^2 + 1)^2} \right\}^2 (m^2 + 1)^2 - \left\{ \frac{y_1^2 - m^2 x_1^2}{(m^2 + 1)^2} \right\}^2 (m^2 - 1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^4}{(m^2 + 1)^2} - \frac{m^4}{(m^2 + 1)^4} (m^2 - 1)^2} \left( \because x_1^2 - \frac{y_1^2}{m^2} = 1 \Leftrightarrow y_1^2 - m^2 x_1^2 = m^2 \right) \\ &= \frac{m^2}{2(m^2 + 1)} \sqrt{1 - \left( \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1} \right)^2} \\ &= \frac{m^2}{2(m^2 + 1)} \sqrt{\frac{(m^2 + 1)^2 - (m^2 - 1)^2}{(m^2 + 1)^2}} \\ &= \frac{m^2}{2(m^2 + 1)} \sqrt{\frac{2m^2 \cdot 2}{(m^2 + 1)^2}} \\ &= \frac{m^3}{(m^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{m^3}{(m^2 + 1)^2}$$

2)

$$f(m) = \frac{m^3}{(m^2 + 1)^2} \quad (m > 0) \text{ とおく。}$$

$$\begin{aligned} f'(m) &= \frac{3m^2(m^2 + 1)^2 - m^3 \cdot 2(m^2 + 1) \cdot 2m}{(m^2 + 1)^4} \\ &= \frac{m^2(3 - m^2)}{(m^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

となる。よって増減表は以下の通りとなる。

|         |     |            |            |            |
|---------|-----|------------|------------|------------|
| $m$     | (0) | ...        | $\sqrt{3}$ | ...        |
| $f'(m)$ |     | +          | 0          | -          |
| $f(m)$  |     | $\nearrow$ | 極大         | $\searrow$ |

よって  $S = f(m)$  の最大値は、

$$f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{(3+1)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{3}}{16}$$