

I.

【解答】

1)	$x = 7 + 2\sqrt{5}$	
2)	(a)	(b)
	$\frac{4}{27}$	$\frac{6}{7}$
3)	(a)	(b)
	$2\sqrt{13}$	6
4)	(a)	(b)
	$2qx - py = pq$	$(-1, 2)$

【解説】

1)

$\sqrt{3x-7} \geq 0$ かつ $\sqrt{x-1} \geq 0$ より定義域は $x \geq \frac{7}{3}$ である。このとき、

$$\begin{aligned} \sqrt{3x-7} - \sqrt{x-1} &= 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{3x-7} &= \sqrt{x-1} + 2 \\ \Leftrightarrow 3x-7 &= (x-1) + 4\sqrt{x-1} + 4 \\ \Leftrightarrow 2x-10 &= 4\sqrt{x-1} \\ \Leftrightarrow x-5 &= 2\sqrt{x-1} \\ \Leftrightarrow (x-5)^2 &= 4(x-1) \text{ かつ } x \geq 5 \left(\because x \geq \frac{7}{3} \right) \\ \Leftrightarrow x^2 - 14x + 29 &= 0 \text{ かつ } x \geq 5 \\ \Leftrightarrow x &= 7 \pm 2\sqrt{5} \text{ かつ } x \geq 5 \\ \therefore x &= 7 + 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

である。

2)(a)

計4試合行って、チームAが優勝する場合に、勝ったチームを順に並べるとABAAとなる。

したがって求める確率は

$$\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$$

である。

(b)

チームAが優勝する場合には、勝ったチームを順に並べるとABABA...BAAのように、まずAが勝った後BとAが交互に勝ち、最後にAが2連勝することで試合が終了する。BとAが交互に勝つことを1セットとして捉えと、チームAが優勝する場合は、Aの勝ちの後 k セット($k \geq 0$, k は整数)を経てAの勝ちにより試合が終了する。したがって求める確率は

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{2}{3} \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^k \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{9}} \right\} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{7} \\ &= \frac{6}{7} \end{aligned}$$

となる。

3)(a)

$B(1, -3, -2)$, $C(-1, 3, 2)$ であるから、

$$\overline{AB} = (0, -6, -4), \overline{AC} = (-2, 0, 0)$$

である。よって、

$$|\overline{AB}|^2 = 52, |\overline{AC}|^2 = 4, \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$$

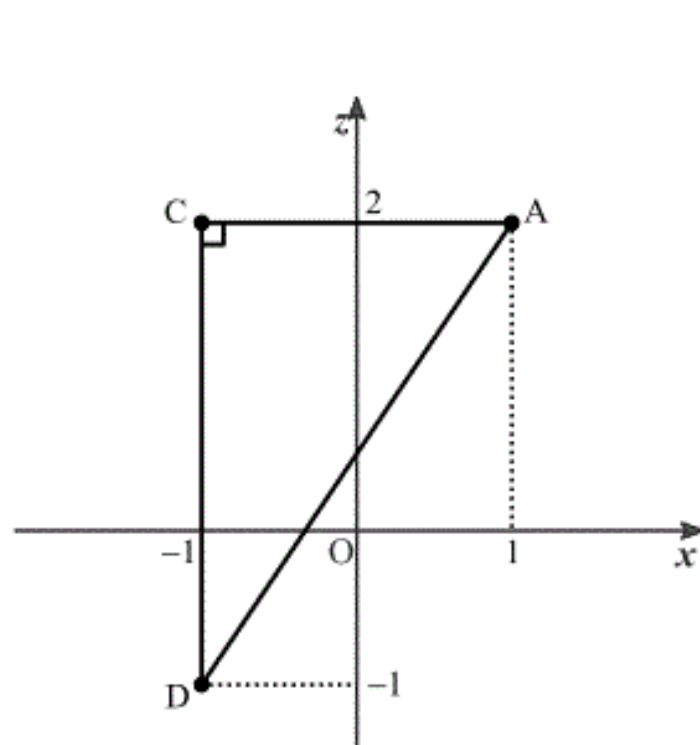
である。したがって、三角形ABCの面積は

$$\frac{1}{2} \sqrt{52 \cdot 4 - 0^2} = 2\sqrt{13}$$

である。

(b)

3点A, C, Dはいずれも平面 $y=3$ 上に存在する。この3点を xz 平面上に図示すると下のようになる。



よって三角形ACDの面積は

$$2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

である。点Bの y 座標は -3 であるから、三角形ACDを底面と見た時の四面体ABCDの高さは6である。したがって、求める体積は

$$3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} = 6$$

である。

4)(a)

$x^2 + 2y^2 = 9$ の両辺を x で微分すると

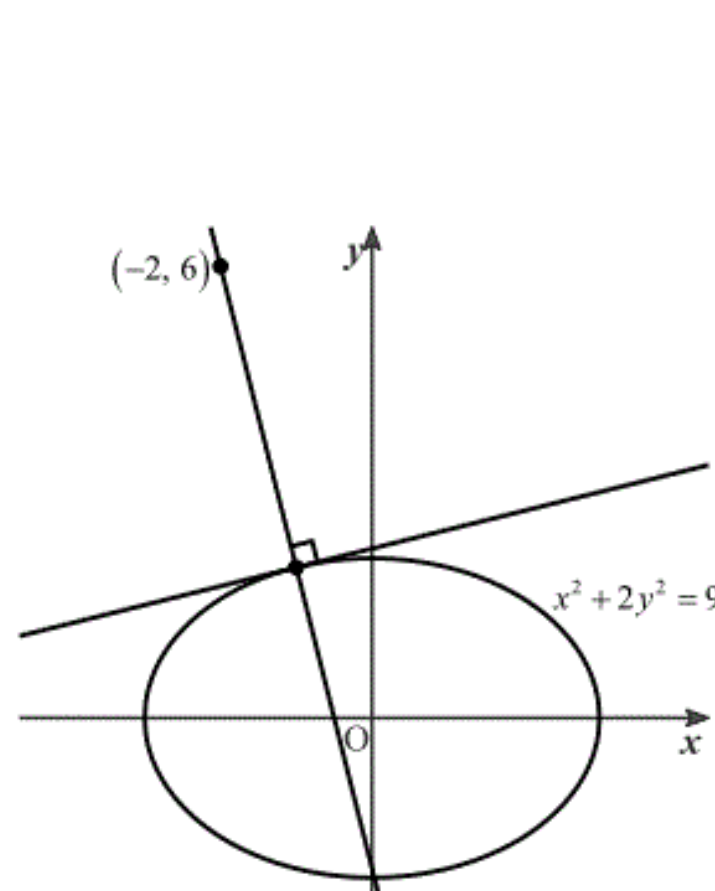
$$2x + 4y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

である。点Pは第二象限にあるから、 $p \neq 0, q \neq 0$ である。よって接線の傾きは $-\frac{p}{2q}$ であるから、法線の傾きは $\frac{2q}{p}$ となる。よって点Pにおける法線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{2q}{p}(x-p) + q \\ \Leftrightarrow py &= 2qx - 2pq + pq \\ \therefore 2qx - py &= pq \end{aligned}$$

である。

(b)



2点 (p, q) , $(-2, 6)$ の距離が最小となるとき、点 $(-2, 6)$ は点 (p, q) におけるこの楕円の法線にある。したがって、点Pにおける法線の方程式に $(x, y) = (-2, 6)$ を代入して

$$\begin{aligned} 2q \cdot (-2) - p \cdot 6 &= pq \\ \Leftrightarrow (p+4)q &= -6p \\ \therefore q &= \frac{-6p}{p+4} \left(\because p+4 > 0 \right) \end{aligned}$$

となる。点 (p, q) は楕円上の点より、

$$\begin{aligned} p^2 + 2q^2 &= 9 \\ \Leftrightarrow p^2 + 2 \cdot \left(\frac{-6p}{p+4}\right)^2 &= 9 \quad \dots \textcircled{1} \\ \Leftrightarrow p^2 + \frac{72p^2}{(p+4)^2} &= 9 \\ \Leftrightarrow p^2(p^2 + 8p + 16) + 72p^2 &= 9(p^2 + 8p + 16) \\ \Leftrightarrow p^4 + 8p^3 + 79p^2 - 72p - 144 &= 0 \\ \Leftrightarrow (p+1)(p^3 + 7p^2 + 72p - 144) &= 0 \\ \therefore p &= -1, p^3 + 7p^2 + 72p - 144 = 0 \end{aligned}$$

となる。ここで $f(p) = p^3 + 7p^2 + 72p - 144$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(p) &= 3p^2 + 14p + 72 \\ &= 3\left(p + \frac{7}{3}\right)^2 + \frac{167}{3} \\ &> 0 \end{aligned}$$

となる。よって、 $f(p)$ は単調増加し、さらに

$$f(0) = -144 < 0$$

であるから、 $p < 0$ において $f(p) < 0$ であることがわかる。よって、 $f(p) = 0$ は $p < 0$ に実数解をもたないとわかるから、 $\textcircled{1}$ の解は $p = -1$ である。したがって、点 $(-2, 6)$ との距離が最小となる楕円上の点の座標は $(-1, 2)$ である。

II.

(1)

数列 $\{c_k\}$ の一般項を

$$c_k = pk^2 + qk + r \quad (p \neq 0)$$

とおく。このとき問題文より

$$c_1 = 2, c_2 = 1, c_3 = 2$$

であるから,

$$\begin{cases} p+q+r=2 \\ 4p+2q+r=1 \\ 9p+3q+r=2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow p=1, q=-4, r=5$$

である。したがって、数列 $\{c_k\}$ の一般項は

$$c_k = k^2 - 4k + 5$$

と表される。

$$(\text{答}) \quad c_k = k^2 - 4k + 5$$

(2)

第 l 群の和を T_l とおくと,

$$\begin{aligned} T_l &= l \cdot c_l \\ &= l^3 - 4l^2 + 5l \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} S(k) &= \sum_{l=1}^k T_l \\ &= \sum_{l=1}^k (l^3 - 4l^2 + 5l) \\ &= \frac{1}{4}k^2(k+1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + 5 \cdot \frac{1}{2}k(k+1) \\ &= \frac{1}{12}k(k+1)\{3k(k+1) - 8(2k+1) + 30\} \\ &= \frac{1}{12}k(k+1)(3k^2 - 13k + 22) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{12}k(k+1)(3k^2 - 13k + 22)$$

(3)

$$S(10) = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 192 = 1760$$

である。ここで、 $c_{11} = 82$ であるから、 $S(11) = 1760 + 11 \cdot 82 > 2500$ である。第11群の第 x 項までの和が 2500 を超えるような x の範囲を考えると,

$$\begin{aligned} 1760 + 11x &> 2500 \\ \Leftrightarrow 11x &> 740 \\ \therefore x &> 67.27 \dots \end{aligned}$$

であるから、第11群の第68項までの和は初めて 2500 を超える。したがって、求める n の値は

$$\begin{aligned} n &= 68 + \sum_{k=1}^{10} c_k \\ &= 68 + \sum_{k=1}^{10} (k^2 - 4k + 5) \\ &= 68 + \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 + 5 \cdot 10 \\ &= 283 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad n = 283$$

III.

1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x \\ &= \sin x + x \cos x \end{aligned}$$

である。また、

$$f'(0) = 0, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$$

であり、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において $\sin x > 0, \cos x > 0$ であるから

$$f'(x) > 0$$

である。以下では $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ として考える。このとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin x + x \cos x \\ &= \cos x (\tan x + x) \end{aligned}$$

である。また、

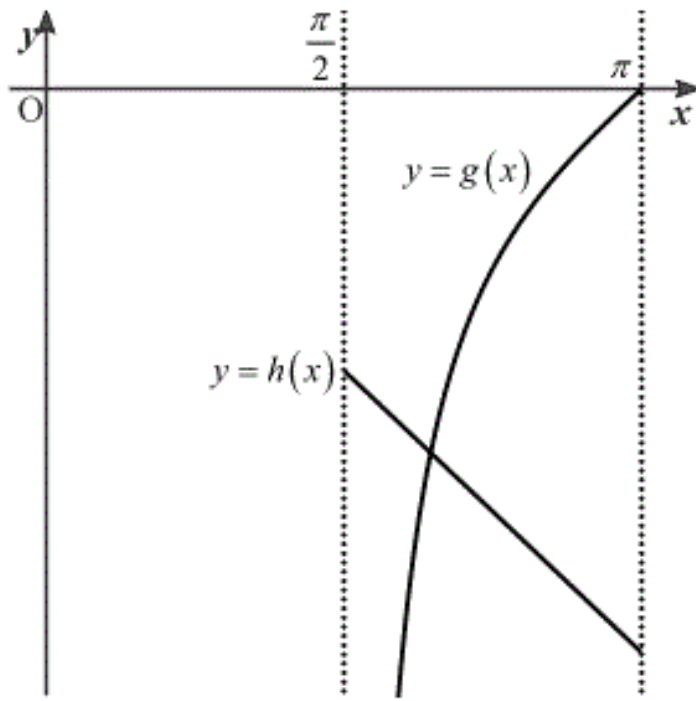
$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \tan x + x &= 0 \quad (\because \cos x < 0) \\ \Leftrightarrow \tan x &= -x \end{aligned}$$

である。ここで、区間 $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ において、 $y = \tan x$ は単調増加であり、 $y = -x$ は単調減少

である。 $g(x) = \tan x, h(x) = -x$ とおくと

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} g(x) < \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} h(x), g(\pi) > h(\pi)$$

であるから、 $y = g(x)$ と $y = h(x)$ は区間 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ においてただ1点で交わる。



ここで、交点の x 座標を c とおくと

$$f'(c) = \cos c \{g(c) - h(c)\} = 0 \text{ である。}$$

さらに、 $f'(x) = \cos x \{g(x) - h(x)\}$ であることと区間 $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ における $y = g(x)$ と $y = h(x)$

の大小関係を考慮すると、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	c	...	π
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$		↗	極大	↘	

したがって、 $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で関数 $f(x)$ は極大値をただ1つ持つ。

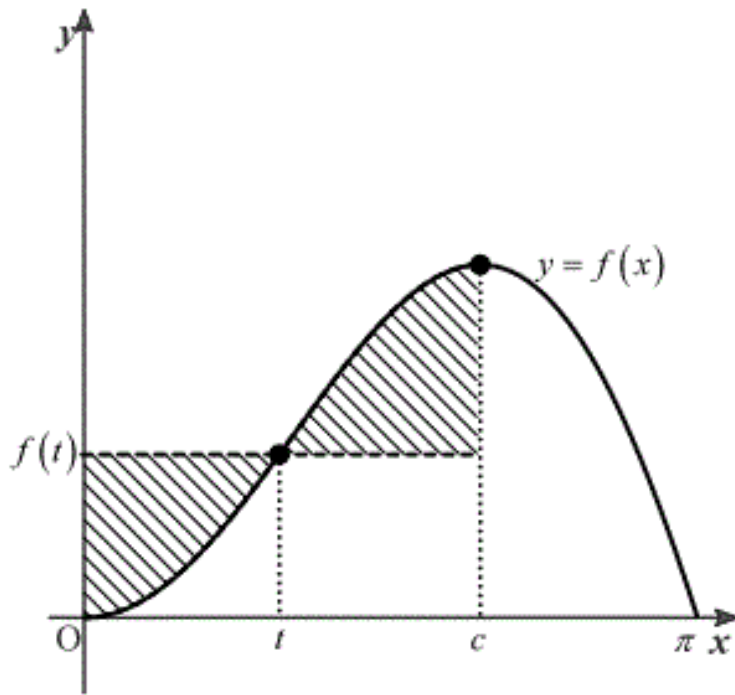
(証明終)

2)

$$(y - f(x))(y - f(t)) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq y \leq f(t) \text{ または } f(t) \leq y \leq f(x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。ここで、 $\textcircled{1}$ が表す領域を図示すると下図のようになる。



このとき、

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t \{f(t) - f(x)\} dx + \int_t^c \{f(x) - f(t)\} dx \\ &= 2 \int_0^t \{f(t) - f(x)\} dx + \int_0^c \{f(x) - f(t)\} dx \end{aligned}$$

である。ここで、 $y = f(x)$ の原始関数の1つを $y = F(x)$ とおくと、

$$\begin{aligned} S(t) &= 2 \int_0^t \{f(t) - f(x)\} dx + \int_0^c \{f(x) - f(t)\} dx \\ &= 2 [xf(t) - F(x)]_0^t + [F(x) - xf(t)]_0^c \\ &= (2t - c)f(t) - 2F(t) + F(0) + F(c) \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} S'(t) &= \{(2t - c)f(t) - 2F(t) + F(0) + F(c)\}' \\ &= 2f(t) + (2t - c)f'(t) - 2f(t) \\ &= (2t - c)f'(t) \end{aligned}$$

である。 $0 < t < c$ であることと(1)の増減表より、 $f'(t) > 0$ であるから、

$$S'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{c}{2}$$

である。 $S'(t)$ と $2t - c$ の符号は一致し、区間 $0 < t < c$ の $S(t)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	...	$\frac{c}{2}$	...	(c)
$S'(t)$	↗	-	0	+	↗
$S(t)$		↘	最小	↗	

したがって、 $S(t)$ の最小値を与える t の値は $\frac{c}{2}$ である。

(答) $\frac{c}{2}$