

I.

【解答】

- 1)

(a)	8	(b)	3842
-----	---	-----	------
- 2)

(a)	$\frac{1}{2}n(n+1)$	(b)	$\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$	(c)	$\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)$
-----	---------------------	-----	--------------------------	-----	--------------------------------
- 3)

(a)	-5k	(b)	$\frac{3}{4}\pi$
-----	-----	-----	------------------
- 4)

(a)	2通り	(b)	9通り	(c)	44通り
-----	-----	-----	-----	-----	------

【解説】

1)(a)

$x + \frac{1}{x} = t$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned}x^3 + \frac{1}{x^3} &= 488 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) &= 488 \\ \Leftrightarrow t^3 - 3t - 488 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-8)(t^2 + 8t + 61) &= 0\end{aligned}$$

であり、

$$t^2 + 8t + 61 = (t+4)^2 + 45 > 0$$

であるから、

$$t-8=0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 8$$

となる。

(b)

$x^3 + \frac{1}{x^3} = 488$ であり、(1)の結果より、 $x + \frac{1}{x} = 8$ であるから、

$$\begin{aligned}x^4 + \frac{1}{x^4} &= \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left\{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right\} \\ &= 488 \cdot 8 - (8^2 - 2) \\ &= 3842\end{aligned}$$

となる。

2)(a)

非負整数 i に対して、 $\sum_{k=1}^n (1+x)^k$ における x^i の係数を $f(i)$ とおく。このとき、二項定理より、

$(1+x)^k = \sum_{j=0}^k C_k \cdot x^j$ であるから、

$$f(i) = \sum_{k=1}^n C_k$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}f(1) &= \sum_{k=1}^n C_k \\ &= \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)\end{aligned}$$

となる。

(b)

$$\begin{aligned}f(2) &= \sum_{k=2}^n C_k \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \left\{ \frac{(k+1) - (k-2)}{3} \cdot k(k-1) \right\} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=2}^n \{ (k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2) \} \\ &= \frac{1}{6}(n-1)n(n+1)\end{aligned}$$

となる。

(c)

$$\begin{aligned}f(3) &= \sum_{k=3}^n C_k \\ &= \sum_{k=3}^n \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=3}^n \frac{(k+1) - (k-3)}{4} \cdot k(k-1)(k-2) \\ &= \frac{1}{24} \sum_{k=3}^n \{ (k+1)k(k-1)(k-2) - k(k-1)(k-2)(k-3) \} \\ &= \frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)\end{aligned}$$

となる。

3)(a)

$$\begin{aligned}\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 2\vec{b} &= -(\vec{a} + 3\vec{c})\end{aligned}$$

であるから、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = k (k \neq 0)$ より、

$$\begin{aligned}2\vec{a} \cdot \vec{b} &= -|\vec{a}|^2 - 3\vec{c} \cdot \vec{a} \\ \Leftrightarrow 2k &= -|\vec{a}|^2 - 3k \\ \Leftrightarrow |\vec{a}|^2 &= -5k\end{aligned}$$

となる。

(b)

(a)と同様にして、 $\vec{a} = -(2\vec{b} + 3\vec{c})$ より、

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= -2|\vec{b}|^2 - 3\vec{b} \cdot \vec{c} \\ \Leftrightarrow k &= -2|\vec{b}|^2 - 3k \\ \Leftrightarrow |\vec{b}|^2 &= -2k\end{aligned}$$

となる。 $|\vec{b}|^2 \geq 0$ より、 $-2k \geq 0 \Leftrightarrow k \leq 0$ であるから、 $k \neq 0$ と合わせて、 $k < 0$ である。このも

とで、 $|\vec{b}| = \sqrt{-2k}$ である。また、 $3\vec{c} = -(\vec{a} + 2\vec{b})$ より、

$$\begin{aligned}3|\vec{c}|^2 &= -\vec{a} \cdot \vec{c} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} \\ \Leftrightarrow 3|\vec{c}|^2 &= -k - 2k \\ \Leftrightarrow |\vec{c}|^2 &= -k \\ \therefore |\vec{c}| &= \sqrt{-k} \quad (\because k < 0)\end{aligned}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{c} &= k \\ \Leftrightarrow \sqrt{-2k} \cdot \sqrt{-k} \cos \theta &= k \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}|k| \cos \theta &= k \quad (\because \sqrt{k^2} = |k|) \\ \Leftrightarrow -\sqrt{2}k \cos \theta &= k \quad (\because k < 0) \\ \therefore \cos \theta &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\because k < 0)\end{aligned}$$

であるから、 $0 \leq \theta \leq \pi$ より、 $\theta = \frac{3}{4}\pi$ となる。

4)(a)

3人の人をそれぞれA, B, Cとし、A, B, Cが持ってきたプレゼントをそれぞれa, b, cとする。また、A, B, Cにそれぞれa, b, cが当たったことを、 (a, b, c) と表すことにする。このとき、条件を満たす場合は

$$(b, c, a), (c, a, b)$$

の2通りとなる。

(b)

(a)と同様、A, B, C, Dおよびa, b, c, dをおく。条件を満たす場合のうち、Aにbが当たった場合は、

$$(b, a, d, c), (b, c, d, a), (b, d, a, c)$$

の3通りであり、対称性よりAにc, dが当たった場合も同様である。よって、条件を満たす場合は $3 \cdot 3 = 9$ (通り)となる。

(c)

(a)と同様、A, B, C, D, Eおよびa, b, c, d, eをおく。条件を満たす場合のうち、Aにb、Bにcが当たった場合は、

$$(b, c, a, e, d), (b, c, d, e, a), (b, c, e, a, d)$$

の3通りであり、対称性よりBにd, eが当たった場合も同様である。また、Aにb、Bにaが当たった場合は

$$(b, a, d, e, c), (b, a, e, c, d)$$

の2通りより、Aにbが当たった場合は $3 \cdot 3 + 2 = 11$ (通り)となる。対称性よりAにc, d, eが当たった場合も同様であるから、条件を満たす場合は $4 \cdot 11 = 44$ (通り)となる。

II

1)

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$ とする。このとき、実数 p, q で表される座標平面上の点 (p, q) について、

点 (p, q) が円 C の外部に存在する $\Leftrightarrow f(p, q) > 0$

点 (p, q) が円 C の周上に存在する $\Leftrightarrow f(p, q) = 0$

点 (p, q) が円 C の内部に存在する $\Leftrightarrow f(p, q) < 0$

が成立する。したがって、満たすべき条件は、

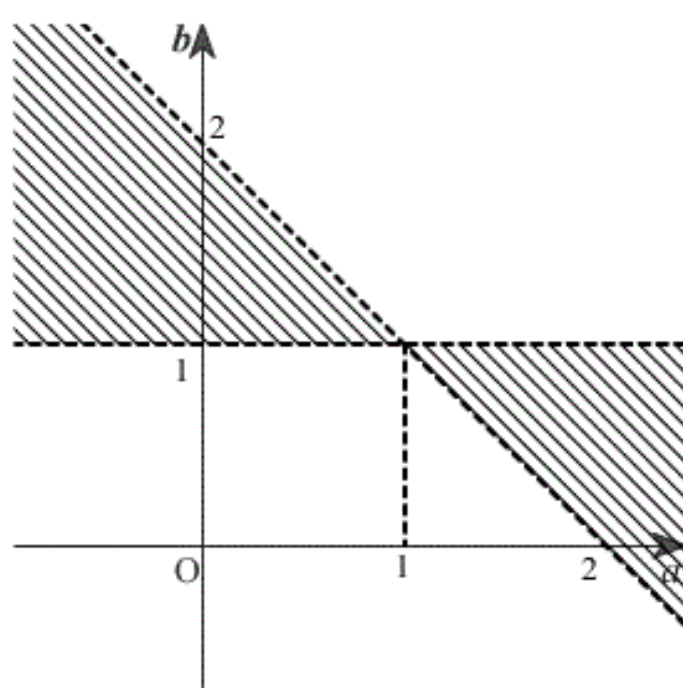
$$f(0, 2) \cdot f(2, 2) < 0$$

$$\Leftrightarrow (0^2 + 2^2 - 2a \cdot 0 - 2b \cdot 2)(2^2 + 2^2 - 2a \cdot 2 - 2b \cdot 2) < 0$$

$$\Leftrightarrow (4 - 4b)(8 - 4a - 4b) < 0$$

$$\therefore (b - 1)(a + b - 2) < 0$$

となる。よって、点 (a, b) の存在範囲は、下図における斜線部である。ただし、境界線上は含まない。



(答) 前図

2)

線分 AB の両端が円 C の外部にある条件は、1)より、

$$\begin{cases} f(0, 2) > 0 \\ f(2, 2) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b < 1 \\ a + b < 2 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、両端を除く部分の線分 AB は $y = 2$ ($0 < x < 2$) と表されるから、

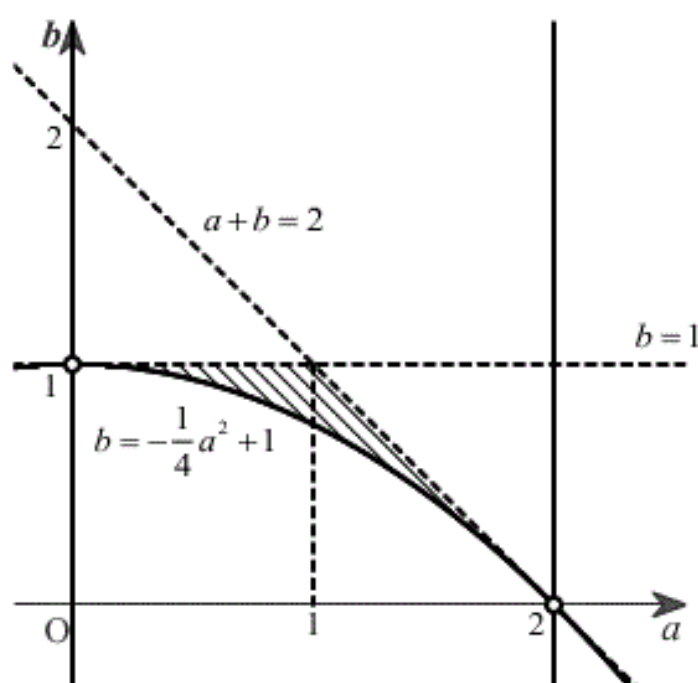
$$\begin{aligned} g(x) &= f(x, 2) \\ &= x^2 - 2ax - 4b + 4 \\ &= (x - a)^2 - a^2 - 4b + 4 \end{aligned}$$

と設定する。このとき、線分 AB の両端以外の点が円と共有点をもつために満たすべき条件は、 $0 < x < 2$ において $g(x)$ の最小値が 0 以下になることである。よって、 $g(0) > 0$, $g(2) > 0$ より、

$$\text{軸: } 0 < a < 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{最小値: } -a^2 - 4b + 4 \leq 0 \Leftrightarrow b \geq -\frac{1}{4}a^2 + 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。よって、①、②、③より点 (a, b) の存在範囲は、下図における斜線部である。ただし、境界線上は、実線上のみ含み、2点 $(0, 1)$, $(2, 0)$ は含まない。



(答) 前図

Ⅲ

1)

$$(e^{-x} \cos x)' = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(e^{-x} \sin x)' = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。よって、 $((\textcircled{2}) - \textcircled{1}) \times \frac{1}{2}$ より、 $\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x)' = e^{-x} \cos x$ であるから、

$$\int e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

となる。

$$(\text{答}) \int e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

2)

$$e^{-x} \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \quad (\because e^{-x} > 0)$$

より、

$$x_k = -\frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \geq 1) \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、 $f(x) = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x)$ とすると、1)より、

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} e^{-x} \cos x dx \\ &= [f(x)]_{x_{k-1}}^{x_k} \\ &= f(x_k) - f(x_{k-1}) \end{aligned}$$

であるから、 $x_0 = 0$ に注意すると、任意の自然数 n に対して、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n I_k &= I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_{n-1} + I_n \\ &= \{f(x_1) - f(x_0)\} + \{f(x_2) - f(x_1)\} + \{f(x_3) - f(x_2)\} \\ &\quad + \dots + \{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})\} + \{f(x_n) - f(x_{n-1})\} \\ &= f(x_n) - f(0) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2} e^{-x_n} + \frac{1}{2} \quad \left(\because \cos x_n = 0, \sin x_n = (-1)^{n-1} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ。①より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-x_n} = 0$ となる。したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n I_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{2} e^{-x_n} + \frac{1}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n I_k = \frac{1}{2}$$