

第 1 問

(1)

q_2 は ○○ または ×○ となる確率より

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

となる。 r_2 は ○× となる確率より

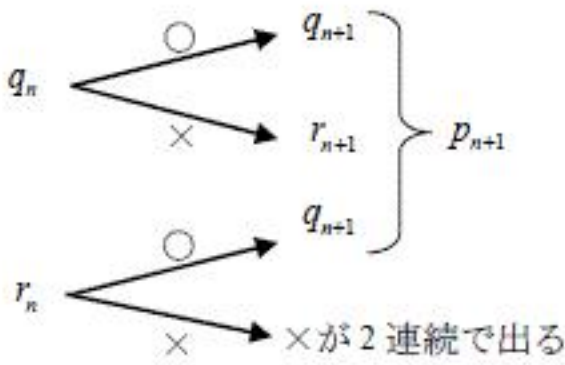
$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

となる。

(答) $q_2 = \frac{1}{3}, r_2 = \frac{2}{9}$

(2)

遷移図は以下のとおりである。



よって、上図より

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \frac{1}{3}(q_n + r_n) \\ r_{n+1} &= \frac{2}{3}q_n \\ p_{n+1} &= q_{n+1} + r_{n+1} \\ &= q_n + \frac{1}{3}r_n \end{aligned}$$

となる。

(答) $p_{n+1} = q_n + \frac{1}{3}r_n, q_{n+1} = \frac{1}{3}(q_n + r_n), r_{n+1} = \frac{2}{3}q_n$

(3)

(2)で求めた漸化式を用いて、逐次計算していくと

n	2	3	4	5	6
p_n	$\frac{5}{9}$	$\frac{11}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{43}{243}$	$\frac{85}{729}$
q_n	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{11}{81}$	$\frac{7}{81}$	$\frac{43}{729}$
r_n	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{22}{243}$	$\frac{14}{243}$

となる。

(答) $p_4 = \frac{7}{27}, p_5 = \frac{43}{243}, p_6 = \frac{85}{729}$

第2問

(1)

$\overline{AB} = (2, -3, -1)$, $\overline{AC} = (1, -5, -4)$ である。求めるベクトルを $\overline{m} = (a, b, c)$ とおくと、 $\overline{m}$ は $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ に垂直だから

$$\overline{m} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow 2a - 3b - c = 0$$

$$\overline{m} \cdot \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow a - 5b - 4c = 0$$

となる。2式を連立して解くと、 $b = a$, $c = -a$ となる。よって、求めるベクトルのうちの一つは $\overline{m} = (1, 1, -1)$ となる。

(答) $(1, 1, -1)$

(2)

$\overline{DH}$ は平面 α に垂直だから、 $\overline{DH} = k\overline{m}$ とおけて、

$$\overline{AH} = \overline{DH} - \overline{DA}$$

$$= (k, k, -k) - (0, 0, 6)$$

$$= (k, k, -k - 6)$$

となる。また、点 H は平面 α 上にあるから

$$\overline{AH} = p\overline{AB} + q\overline{AC}$$

$$= (2p + q, -3p - 5q, -p - 4q)$$

とおける。それぞれの x, y, z 成分を比較して

$$\begin{cases} k = 2p + q \\ k = -3p - 5q \\ -k - 6 = -p - 4q \end{cases}$$

を得る。これらを連立して解くと

$$p = -\frac{12}{7}, q = \frac{10}{7}, k = -2$$

となる。よって、点 H の座標は

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{AH}$$

$$= (1, 2, 3) + (-2, -2, -4)$$

$$= (-1, 0, -1)$$

となる。

(答) $H(-1, 0, -1)$

(3)

PQ の中点を R とおき、 $\overline{AR} = l\overline{AC}$ とおくと、

$$\overline{HR} = \overline{HA} + \overline{AR}$$

$$= \overline{OA} - \overline{OH} + l\overline{AC}$$

$$= (1 - (-1) + l, 2 - 0 - 5l, 3 - (-1) - 4l)$$

$$= (2 + l, 2 - 5l, 4 - 4l)$$

となる。HR と AC は直交するから

$$\overline{AC} \cdot \overline{HR} = 0$$

$$\Leftrightarrow 42l - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{4}{7}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \text{HR} &= \sqrt{\left(2 + \frac{4}{7}\right)^2 + \left(2 - 5 \cdot \frac{4}{7}\right)^2 + \left(4 - 4 \cdot \frac{4}{7}\right)^2} \\ &= \frac{6}{7}\sqrt{14} \end{aligned}$$

$$\text{PQ} = 2\text{PR}$$

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{4^2 - \left(\frac{6}{7}\sqrt{14}\right)^2} \\ &= \frac{4}{7}\sqrt{70} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\triangle \text{HPQ}$ の面積は

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{7}\sqrt{70} \times \frac{6}{7}\sqrt{14} = \frac{24}{7}\sqrt{5}$$

である。

(答) $\frac{24}{7}\sqrt{5}$

第3問

(1)

点 (x, y) は1次変換 f によって、点 $(x, -y)$ にうつる。よって、

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=x \\ cx+dy=-y \end{cases}$$

となる。これが任意の点 (x, y) について成り立つから、 $a=1, b=0, c=0, d=-1$ となる。

$$(\text{答}) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2)

点 $P(x, y)$ が1次変換 g によって、点 $Q(x', y')$ にうつるとする。 g は直線 $y=kx$ に関する対称移動を表すから、 PQ の中点は直線 $y=kx$ 上にあり、

$$\frac{y+y'}{2} = k \frac{x+x'}{2} \Leftrightarrow y+y' = k(x+x') \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

となる。また、 PQ は直線 $y=kx$ と直交するから

$$\frac{y-y'}{x-x'} \cdot k = -1 \Leftrightarrow k(y-y') = -(x-x') \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

となる。①②式を連立して解くと

$$\begin{cases} x' = \frac{1-k^2}{1+k^2}x + \frac{2k}{1+k^2}y \\ y' = \frac{2k}{1+k^2}x - \frac{1-k^2}{1+k^2}y \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1-k^2}{1+k^2} & \frac{2k}{1+k^2} \\ \frac{2k}{1+k^2} & -\frac{1-k^2}{1+k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

となる。よって、 $B = \begin{pmatrix} \frac{1-k^2}{1+k^2} & \frac{2k}{1+k^2} \\ \frac{2k}{1+k^2} & -\frac{1-k^2}{1+k^2} \end{pmatrix}$ である。

$$(\text{答}) B = \begin{pmatrix} \frac{1-k^2}{1+k^2} & \frac{2k}{1+k^2} \\ \frac{2k}{1+k^2} & -\frac{1-k^2}{1+k^2} \end{pmatrix}$$

(3)

合成変換 $g \circ f$ を表す行列 C は $C = BA$ で表せられるから

$$\begin{aligned} C &= BA \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1-k^2}{1+k^2} & \frac{2k}{1+k^2} \\ \frac{2k}{1+k^2} & -\frac{1-k^2}{1+k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1-k^2}{1+k^2} & -\frac{2k}{1+k^2} \\ \frac{2k}{1+k^2} & \frac{1-k^2}{1+k^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) C = \begin{pmatrix} \frac{1-k^2}{1+k^2} & -\frac{2k}{1+k^2} \\ \frac{2k}{1+k^2} & \frac{1-k^2}{1+k^2} \end{pmatrix}$$

(4)

C に $k=\sqrt{3}$ を代入すると

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となる。ここで、原点 O を中心として角 θ だけ回転する変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

であるから、比較して $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ 、 $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ を得る。よって、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ だから $\theta = \frac{2}{3}\pi$ となる。

$$(\text{答}) \theta = \frac{2}{3}\pi$$

第4問

(1)

$f(x) = e^{-x} \cos x$ より, 微分して

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x \\ &= -\sqrt{2} e^{-x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

となり, 以下の増減表を得る。

x	0	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	π
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

したがって, 極大値は存在せず, 極小値は $x = \frac{3}{4}\pi$ のとき $f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3}{4}\pi}$ となる。

(答) 極大値はなし, 極小値は $x = \frac{3}{4}\pi$ のとき $-\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3}{4}\pi}$

(2)

$f(0) = 1, f(\pi) = -e^{-\pi}$ より $f(0) > 0, f(\pi) < 0$ であり, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ より (1) の増減表から

$$\int_0^{\pi} |f(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \{-f(x)\} dx$$

であることがわかる。ここで,

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \cos x dx &= -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x dx \\ &= -e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \cos x dx \end{aligned}$$

$$\therefore \int e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C \quad (C: \text{積分定数})$$

より,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |f(x)| dx &= \left[\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\pi} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $e^{-\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} e^{-\pi} + \frac{1}{2}$