

第1問

(1) 三角形ABCの面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bc \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)r \end{aligned}$$

$$\therefore r = \frac{bc}{a+b+c} \sin \theta$$

$$(\text{答}) \quad r = \frac{bc}{a+b+c} \sin \theta$$

(2) 正弦定理より,

$$R = \frac{a}{2 \sin \theta}$$

$$\text{よって } \frac{r}{R} = \frac{2bc}{a(a+b+c)} \sin^2 \theta$$

ここで $a=1$, $b=c$ なので

$$\frac{r}{R} = \frac{2b^2}{1+2b} \sin^2 \theta$$

また, 余弦定理より

$$1 = 2b^2 - 2b^2 \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{2b^2 - 1}{2b^2}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} \frac{r}{R} &= \frac{2b^2}{1+2b} (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \frac{2b^2}{1+2b} \left(1 - \left(\frac{2b^2 - 1}{2b^2} \right)^2 \right) \\ &= \frac{2b - 1}{2b^2} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} - 1 \right)^2 + \frac{1}{2} \\ &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

だから, $\frac{r}{R}$ は $b=1$, $\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\frac{1}{2}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}$$

第2問

(1) 帰納法により示す。

(i) $n=1$ のとき $a_1=2 \neq 1$ より命題成立。

(ii) $n=k$ で命題が成り立つと仮定する。

このとき、 $a_{k+1}-1=\frac{a_k-1}{a_k+4} \neq 0$ なので $n=k+1$ でも命題が成り立つ。

以上より、数学的帰納法から命題が成立する。

(証明終)

(2)

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}+3}{a_{n+1}-1} = \frac{\frac{2a_n+3}{a_n+4}+3}{\frac{2a_n+3}{a_n+4}-1} = 5 \frac{a_n+3}{a_n-1} = 5b_n$$

(答) $b_{n+1} = 5b_n$

(3) $b_1 = \frac{2+3}{2-1} = 5$ である。

ゆえに、

$$b_n = 5^{n-1} \cdot 5 = 5^n$$

ここで、 $b_n \neq 1$ であるので与式を a_n について解くと、

$$a_n = \frac{b_n+3}{b_n-1}$$

よって、

$$a_n = \frac{5^n+3}{5^n-1}$$

(答) $a_n = \frac{5^n+3}{5^n-1}$

第3問

- (1) 求める放物線上の点を (x, y) とすると,
 (x, y) から準線までの距離と, (x, y) から焦点までの距離は等しいので

$$\begin{aligned}y-1 &= \sqrt{x^2 + (y-2)^2} \\ y^2 - 2y + 1 &= x^2 + y^2 - 4y + 4 \\ y &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

ゆえに, 求める放物線は $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ である。

(答) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}$

- (2) P の座標を (x, y) とすると,

$$\begin{aligned}\frac{PH}{FP} &= \frac{r}{1} = \frac{|y-1|}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2}} \\ r\sqrt{x^2 + (y-2)^2} &= |y-1|\end{aligned}$$

両辺二乗して,

$$\begin{aligned}r^2(x^2 + (y-2)^2) &= y^2 - 2y + 1 \\ r^2x^2 + (r^2 - 1)y^2 + (-4r^2 + 2)y + (4r^2 - 1) &= 0\end{aligned}$$

(答) $r^2x^2 + (r^2 - 1)y^2 + (-4r^2 + 2)y + (4r^2 - 1) = 0$

- (3) $r = \sqrt{2}$ のとき,

$$\begin{aligned}2x^2 + y^2 - 6y + 7 &= 0 \\ x^2 + \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(y-3) \right\}^2 &= 1\end{aligned}$$

だから $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ と見比べて,

$$\begin{cases} x = \cos t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(y-3) = \sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sqrt{2} \sin t + 3 \end{cases}$$

(答) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sqrt{2} \sin t + 3 \end{cases}$

- (4) $y = \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow x = 2y - 2$

より, $x = 2y - 2$ を(2)の答えに代入して

$$\begin{aligned}r^2(2y-2)^2 + (r^2 - 1)y^2 + (-4r^2 + 2)y + (4r^2 - 1) &= 0 \\ (5r^2 - 1)y^2 + (-12r^2 + 2)y + (8r^2 - 1) &= 0\end{aligned}$$

を得る。これが重解をもてばよいから,

$$(6r^2 - 1)^2 - (5r^2 - 1)(8r^2 - 1) = r^2(1 + 2r)(1 - 2r) = 0$$

$0 < r$ より, $r = \frac{1}{2}$

このとき, $(x^2 \text{の係数}) = r^2 > 0$, $(y^2 \text{の係数}) = r^2 - 1 < 0$ だから C は双曲線となる。

(答) 双曲線

第4問

$$(1) \int_a^b \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_a^b = \frac{b-a}{ab}$$

ここで $ab < b^2$ より,

$$\frac{b-a}{b^2} < \frac{b-a}{ab} = \int_a^b \frac{1}{x^2} dx$$

(証明終)

(2) (1)より

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)-k}{(k+1)^2} \\ &< \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2} dx \end{aligned}$$

($\because 0 < k < k+1$ より, (1)の式で $a = k, b = k+1$ と見た)

$$\begin{aligned} &= \int_1^n \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{n-1}{n} \\ &= 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

(証明終)