

第1問

(1)

全ての玉を区別して考える。全ての玉の並べ方の総数は、

$$10! (\text{通り})$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。1 回目に取り出した玉と 4 回目に取り出した玉の番号が同じであるとき、それがどの番号であるかは、

$$5 (\text{通り})$$

である。同じ番号の 2 つの玉がそれぞれ 1 回目に取り出した玉か 4 回目に取り出した玉かは

$$2! = 2 (\text{通り})$$

である。その他の玉の並べ方は、

$$8! (\text{通り})$$

である。したがって、求める確率は、

$$\frac{5 \cdot 2 \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{9}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{9}$$

(2)

対称性から、1 回目に取り出した玉の番号が、4 回目に取り出した玉の番号より大きい確率は、前者が後者より小さい確率と等しい。2 つの番号が異なる事象の余事象は、2 つの番号が同じである事象であるから、求める確率は、

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{9} \right) = \frac{4}{9}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{4}{9}$$

(3)

玉の番号は 1 から 5 までで、それぞれの玉が 2 個あるので、6 回目までには必ずそれまで取り出した玉と同じ番号の玉が出る。

[1] 2 回目に 1 回目と同じ番号が出るとき

その確率は、 $\frac{1}{9}$ である。

[2] 3 回目に初めてそれまでに取り出した玉の番号と同じ番号の玉が出るとき

1 回目、2 回目に取り出した玉の番号がそれぞれ異なり、3 回目にそれまでに出たいずれかの番号と同じ番号の玉を取り出せばよい。1 回目、2 回目に取り出した玉の番号がそれぞれ異なる玉の出方は、1 から 5 までの番号から 2 つ選んでそれを並べ替え、なおかつそれぞれの番号のついた 2 つの玉のうちそれぞれ 1 つを選ぶ方法の総数であるから、

$${}_5P_2 \cdot 2 \cdot 2 (\text{通り})$$

である。3 回目にそれまでに出たいずれか番号と同じ番号の玉を取り出す確率は、8 個の玉のうち、1 回目、2 回目に取り出したいずれかの玉の番号と同じ番号の玉を選ぶ確率であるから、

$$\frac{2}{8}$$

である。ゆえに、このときの確率は、

$$\frac{{}_5P_2 \cdot 2 \cdot 2}{{}_{10}P_2} \cdot \frac{2}{8} = \frac{2}{9}$$

である。

[3] 4 回目に初めてそれまでに取り出した玉の番号と同じ番号の玉が出るとき

[2]と同様に考えて、このときの確率は、

$$\frac{{}_5P_3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{{}_{10}P_3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2}{7}$$

である。

[4] 5 回目に初めてそれまでに取り出した玉の番号と同じ番号の玉が出るとき

[2]と同様に考えて、このときの確率は、

$$\frac{{}_5P_4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{{}_{10}P_4} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{63}$$

である。

[5] 6 回目に初めてそれまでに取り出した玉の番号と同じ番号の玉が出るとき

6 回目までには必ずそれまでに取り出した玉と同じ番号の玉が出るので、この事象は[1]~[4]の余事象なので、求める確率は、

$$1 - \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{7} + \frac{16}{63} \right) = \frac{8}{63}$$

である。

[1]~[5]から、求める期待値は、

$$2 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{2}{9} + 4 \cdot \frac{2}{7} + 5 \cdot \frac{16}{63} + 6 \cdot \frac{8}{63} = \frac{256}{63}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{256}{63}$$

第2問

(1)

$f(x) = x^4 - 3x^2 + mx + n$ を $x^2 + x + 1$ で割ると、商は $x^2 - x - 3$ 、余りは $(m+4)x + n + 3$ である。

この余りが $x + 1$ に等しいから、

$$\begin{cases} m+4=1 \\ n+3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-3 \\ n=-2 \end{cases}$$

となる。

(答) $m=-3, n=-2$

(2)

m, n は実数であるから、方程式 $f(x) = 0$ の解の1つが $1 + \sqrt{2}i$ であるから、その共役複素数 $1 - \sqrt{2}i$ も解の1つである。ここで、

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{2}i) + (1 - \sqrt{2}i) &= 2 \\ (1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) &= 3 \end{aligned}$$

であるから、解と係数の関係から、 $1 + \sqrt{2}i, 1 - \sqrt{2}i$ を解に持つ2次方程式の1つは、

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

である。方程式 $f(x) = 0$ は $1 + \sqrt{2}i, 1 - \sqrt{2}i$ を解に持つので、 $f(x)$ は $x^2 - 2x + 3$ で割り切れる。

そこで、 $f(x)$ を $x^2 - 2x + 3$ で割ると、商は $x^2 + 2x - 2$ 、余りは $(m-10)x + n + 6$ である。 $f(x)$ は $x^2 - 2x + 3$ で割り切れるので、

$$\begin{cases} m-10=0 \\ n+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=10 \\ n=-6 \end{cases}$$

である。また、

$$f(x) = (x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x - 2)$$

であるから、 $f(x) = 0$ の解は、

$$x = 1 \pm \sqrt{2}i, -1 \pm \sqrt{3}$$

となり、 $1 + \sqrt{2}i$ 以外の解は、

$$1 - \sqrt{2}i, -1 \pm \sqrt{3}$$

である。

(答) $m=10, n=-6$

残りの解: $1 - \sqrt{2}i, -1 \pm \sqrt{3}$

(3)

$m=0$ のとき、方程式 $f(x) = 0$ は、

$$x^4 - 3x^2 + n = 0 \Leftrightarrow n = -x^4 + 3x^2$$

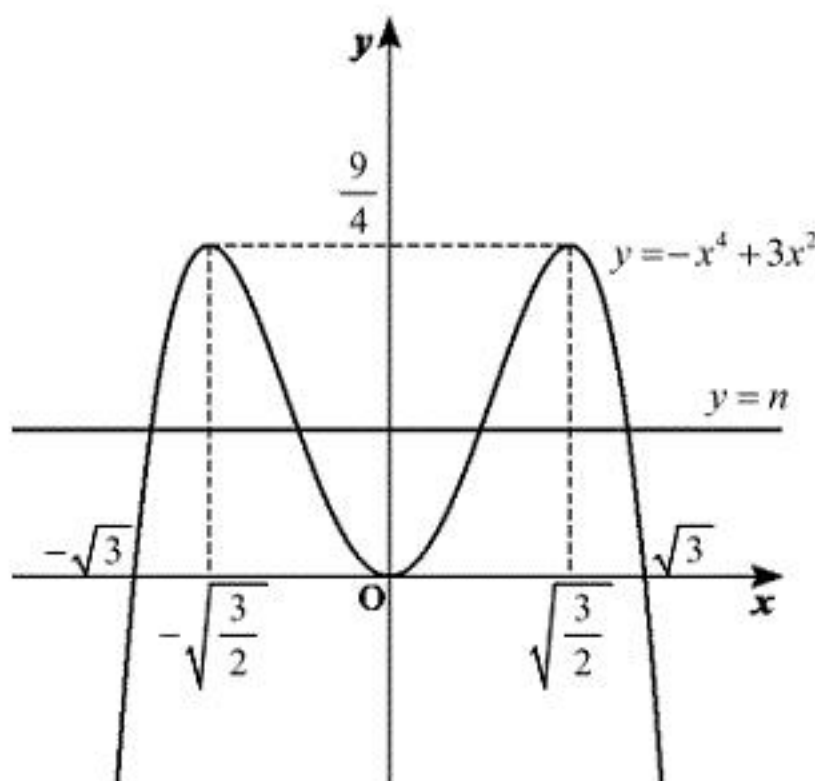
となる。よって、方程式 $x^4 - 3x^2 + n = 0$ の実数解の個数は、直線 $y = n$ と曲線 $y = -x^4 + 3x^2$ の共有点の個数に等しい。ここで曲線 $y = -x^4 + 3x^2$ について、

$$y' = -4x^3 + 6x = -2x(2x^2 - 3)$$

となるので、次の増減表が書ける。

x	...	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	...	0	...	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	...
y'	+	0	-	0	+	0	-
y	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$

よって、曲線 $y = -x^4 + 3x^2$ と直線 $y = n$ のグラフは下図のようになる。



ここで、 $x^4 - 3x^2 + n = 0$ は4次方程式であるから、4つの解を持つ。ゆえに、前図から、

$0 < n < \frac{9}{4}$ では、方程式 $x^4 - 3x^2 + n = 0$ の解は全て実数になる。

[1] $n = \frac{9}{4}$ のとき

$$x^4 - 3x^2 + n = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 + \frac{9}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2}x + \sqrt{3})^2 (\sqrt{2}x - \sqrt{3})^2 = 0$$

となるので、これは2重解を2つ持ち、4つの解はすべて実数である。

[2] $n = 0$ のとき

$$x^4 - 3x^2 + n = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 3) = 0$$

となるので、これは2重解を1つ、その他に実数解を2つもち、4つの解は全て実数である。

[3] $n < 0$ のとき

$$x^4 - 3x^2 + n = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4n}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{9 - 4n}}{2}}$$

となる。 $n < 0$ より、 $3 - \sqrt{9 - 4n} < 0$ であるから、

$$x = \pm \sqrt{\frac{3 - \sqrt{9 - 4n}}{2}}$$

は虚数解である。ゆえに、 $n < 0$ では虚数解が存在する。

[1], [2], [3]より、方程式 $f(x) = 0$ の解が全て実数であるような n の範囲は、

$$0 \leq n \leq \frac{9}{4}$$

である。

(答) $0 \leq n \leq \frac{9}{4}$

第3問

(1)

$f(x) = xe^x$ を x で微分すると,

$$f'(x) = (x+1)e^x$$

であるから, 次の増減表が書ける。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

よって, $f(x)$ は $x = -1$ で最小値 $-\frac{1}{e}$ をとる。

(答) $-\frac{1}{e}$

(2)

p を実数として, 接点を $(p, f(p))$ とおくと, $f(x)$ の接線の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= f'(p)(x-p) + f(p) \\ &= (p+1)e^p x - p^2 e^p \end{aligned}$$

となる。この接線の傾きが負であるから,

$$(p+1)e^p < 0 \Leftrightarrow p < -1 \quad (\because e^p > 0)$$

である。また, 接線と x 軸の交点の x 座標は,

$$\begin{aligned} 0 &= (p+1)e^p x - p^2 e^p \\ \Leftrightarrow x &= \frac{p^2}{p+1} \quad (\because e^p \neq 0, p \neq -1) \end{aligned}$$

となる。 $g(p) = \frac{p^2}{p+1}$ とおくと,

$$g'(p) = \frac{p^2 - 2p(p+1)}{(p+1)^2} = -\frac{p(p+2)}{(p+1)^2}$$

となる。よって, これと $p < -1$ とから, 次の増減表が書ける。

p	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1
$g'(p)$	$+$	0	$-$	
$g(p)$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	

したがって, $p = -2$ のとき, 接線と x 軸の交点の x 座標は最大値 -4 をとる。

(答) -4

第4問

(1)

$OP = \sqrt{a^2 + c^2}$ であるから,

$$\sin \theta = \frac{c}{OP} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{a}{OP} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

である。

$$(答) \quad \sin \theta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

(2)

点Qについて, 原点を中心に $-\theta$ だけ回転させた点の座標は,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{ab + cd}{\sqrt{a^2 + c^2}} \\ \frac{ad - bc}{\sqrt{a^2 + c^2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ただし, (1)の結果を用いた。

$$(答) \quad \begin{cases} x = \frac{ab + cd}{\sqrt{a^2 + c^2}} \\ y = \frac{-bc + ad}{\sqrt{a^2 + c^2}} \end{cases}$$

(3)

点Pの座標が (a, c) , 点Qの座標が (b, d) なので, $\triangle OPQ$ の面積は,

$$\frac{1}{2} |ad - bc|$$

である。

$$(答) \quad \frac{1}{2} |ad - bc|$$

(4)

点P', Q'の座標を (a', c') , (b', d') とおくと

$$\begin{pmatrix} a' \\ c' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b' \\ d' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

となるから, 2式を合わせると

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

となる。ここで, 行列 X, X' を $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ とおくと

$$X' = AX$$

$$\therefore \det X' = \det A \cdot \det X$$

となるが, $\triangle OPQ, \triangle OP'Q'$ の面積はそれぞれ

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} |ad - bc| = \frac{1}{2} |\det X|, \triangle OP'Q' = \frac{1}{2} |a'd' - b'c'| = \frac{1}{2} |\det X'|$$

と表せるから,

$$\triangle OP'Q' = |\det A| \cdot \triangle OPQ$$

$$= |(\sqrt{2} + \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{5}) - 3 \cdot 1| \cdot \triangle OPQ$$

$$= 6 \cdot \triangle OPQ$$

となり, $\triangle OP'Q'$ の面積は $\triangle OPQ$ の面積の6倍であることがわかる。

(答) 6倍