

## 第1問

(1)

$X(9)=0$ となるのは、表3回裏6回出るときである。よって、その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot {}_9C_3 = \frac{21}{128}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{21}{128}$$

(2)

(規則B)を考慮すると、表3回裏6回出て、かつ $X(9)=-3$ となるのは以下の場合のときである。

[1] はじめの3回がすべて裏のとき

これをみたすコインの出し方は ${}_6C_3=20$ 通りだけである。

[2] 1～6回目のうちで、1～3回目のどれか1回に表が出て、残りの5回が裏であるとき

これをみたすコインの出し方は ${}_3C_1 \cdot {}_5C_2=9$ 通りある。

また、コイン9回の目の出方は全部で $2^9=512$ 通りあり、これらは同様に確からしく起こる。よって、表3回裏6回出て、かつ $X(9)=-3$ となる確率は

$$\frac{20+9}{512} = \frac{29}{512}$$

である。したがって、(1)を用いて、 $X(9)=0$ となる確率は

$$\frac{21}{128} - \frac{29}{512} = \frac{55}{512}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{55}{512}$$

(3)

コインの出し方は全部で $2^4=16$ 通りあり、これらは同様に確からしく起こる。

$X(4)=8$ となるのは、すべて表が出たときで1通りある。

$X(4)=5$ となるのは、表3回裏1回出たときで、 ${}_4C_1=4$ 通りある。

$X(4)=2$ となるのは、表2回裏2回出たときで、 ${}_4C_2=6$ 通りある。

$X(4)=-1$ となるのは、表1回裏3回出たときで、かつはじめの3回のうちに表が出ているときであり、3通りある。

$X(4)=-3$ となるのは、はじめの3回がすべて裏であったときで、2通りある。

よって期待値は

$$8 \cdot \frac{1}{16} + 5 \cdot \frac{4}{16} + 2 \cdot \frac{6}{16} + (-1) \cdot \frac{3}{16} + (-3) \cdot \frac{2}{16} = \frac{31}{16}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{31}{16}$$

## 第2問

(1)

放物線  $C_1$  の軸は  $x=1$  であるので、円  $C_2$  の半径を  $r$  とすると円  $C_2$  の方程式は

$$(x-1)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

と書ける。この式と  $y = -x^2 + 2x + 8 = -(x-1)^2 + 9$  から  $x$  を消去して整理すると

$$y^2 - (2r+1)y + 9 = 0$$

となる。ここで、放物線  $C_1$  と円  $C_2$  の2つの接点の  $y$  座標は等しいので、この方程式は解が1つである。よってこの方程式の判別式を  $D$  とすると、

$$D = 0$$

$$\Leftrightarrow (2r+1)^2 - 4 \cdot 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2r+1 = \pm 6$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{5}{2}, -\frac{7}{2}$$

が成り立つ。 $r > 0$  なので  $r = \frac{5}{2}$  となる。

$$\text{(答)} \quad (x-1)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

(2)

放物線  $C_1$  と  $x$  軸の交点の座標は

$$y = -x^2 + 2x + 8 = -(x-4)(x+2)$$

より、 $(-2, 0), (4, 0)$  である。また放物線  $C_1$  の頂点の座標は  $(1, 9)$  である。

円  $C_3$  の方程式を

$$x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$$

とおき、これら3点の座標を代入すると

$$\begin{cases} -2a + c = -4 \\ 4a + c = -16 \\ a + 9b + c = -82 \end{cases}$$

が得られ、これらを連立して解くと

$$a = -2, b = -8, c = -8$$

となる。よって円  $C_3$  の方程式は

$$x^2 - 2x + y^2 - 8y - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-4)^2 = 5^2$$

となる。したがって、円  $C_2$  の半径は  $\frac{5}{2}$  であり、円  $C_3$  の半径は  $5$  であるので、円  $C_3$  の面積は

円  $C_2$  の面積の  $2^2 = 4$  倍となる。

(答) 4

(3)

放物線  $C_1$  の頂点を通り、円  $C_2$  に接する直線は、 $y$  軸に平行にはならない。したがって、条件を満たす直線の方程式は、放物線  $C_1$  の頂点を通るという条件より、 $a$  を傾きとして

$$y = a(x-1) + 9 \Leftrightarrow ax - y + 9 - a = 0$$

とおける。この直線と、円  $C_2$  の中心  $\left(1, \frac{5}{2}\right)$  との距離が  $\frac{5}{2}$  となるような  $a$  は、点と直線の距離

の公式より

$$\frac{\left|a - \frac{5}{2} + 9 - a\right|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{144}{25}$$

$$\Leftrightarrow a = \pm \frac{12}{5}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad y = \pm \frac{12}{5}(x-1) + 9$$

### 第3問

(1)

題意より

$$p \cos \alpha = q \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{p}{q} \quad (\because q > 0)$$

が成り立つ。 $p > 0, q > 0$  より  $\tan \alpha$  は正の実数であり、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  が言える。したがって

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

が成り立つので、それぞれに代入して整理すると

$$\sin \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \cos \alpha = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sin \alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \cos \alpha = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

(2)

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a q \sin x dx + \int_a^{\frac{\pi}{2}} p \cos x dx \\ &= [-q \cos x]_0^a + [p \sin x]_a^{\frac{\pi}{2}} \\ &= p + q - p \sin \alpha - q \cos \alpha \end{aligned}$$

となるので、(1)の結果を代入して整理すると、

$$S = p + q - \sqrt{p^2 + q^2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = p + q - \sqrt{p^2 + q^2}$$

(3)

$$\begin{aligned} S &= p + q - \sqrt{p^2 + q^2} \\ &= \sqrt{p^2 + q^2 + 2pq} - \sqrt{p^2 + q^2} \\ &= \sqrt{4 + 2pq} - 2 \end{aligned}$$

が成り立つので、 $pq$  が最大値をとるとき、 $S$  も最大値をとる。相加相乗平均の関係より

$$4 = p^2 + q^2 \geq 2\sqrt{p^2 q^2} = 2pq \quad (\text{等号成立条件は } p = q = \sqrt{2})$$

となるので、 $pq$  の最大値は 2 となる。よって、 $S$  の最大値は

$$\sqrt{4 + 2 \cdot 2} - 2 = 2\sqrt{2} - 2$$

である。

$$(\text{答}) \quad 2\sqrt{2} - 2$$

# 第4問

(1)

$AP = \alpha P$  より

$$ax + by = \alpha x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$bx + ay = \alpha y \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。ここで  $x > 0, y > 0$  より、 $\textcircled{1} \times y$  と  $\textcircled{2} \times x$  を比較して

$$\begin{aligned} axy + by^2 &= bx^2 + axy \\ \Leftrightarrow bx^2 &= by^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 $b \neq 0$  なので  $x = y$  となる。また、このことから  $\alpha = a + b$  が分かる。

$$\text{(答)} \quad \alpha = a + b, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2)

$$AQ = \beta Q$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} az + bw = \beta z \\ bz + aw = \beta w \end{cases}$$

が成り立つから、(1)と同様にして、

$$\begin{aligned} (az + bw)w &= (bz + aw)z \\ \Leftrightarrow bw^2 &= bz^2 \\ \Leftrightarrow w^2 &= z^2 \quad (\because b \neq 0) \end{aligned}$$

が導ける。よって、 $z < w$  より、

$$z = -w, w > 0$$

となる。 $z^2 + w^2 = 1$  より

$$\begin{aligned} (-w)^2 + w^2 &= 1, w > 0 \\ \Leftrightarrow w &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となる。このとき  $z = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\beta = a - b$  となる。

$$\text{(答)} \quad \beta = a - b, z = -\frac{\sqrt{2}}{2}, w = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(3)

(1), (2)の結果を代入すると

$$\begin{aligned} \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (x \ y) + \beta \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} (z \ w) &= (a + b) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (a - b) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

(4)

(3)より

$$A^n = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (x \ y) + \beta \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} (z \ w) \right\}^n$$

であるが

$$\begin{aligned} \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (x \ y) \beta \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} (z \ w) &= O \\ \beta \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} (z \ w) \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (x \ y) &= O \end{aligned}$$

が成り立つので、

$$A^n = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (x \ y) \right\}^n + \left\{ \beta \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} (z \ w) \right\}^n$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}^n &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}^n &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であることから

$$\begin{aligned} A^n &= \alpha^n \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}^n + \beta^n \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}^n \\ &= \alpha^n \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta^n \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha^n + \beta^n & \alpha^n - \beta^n \\ \alpha^n - \beta^n & \alpha^n + \beta^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a + b)^n + (a - b)^n & (a + b)^n - (a - b)^n \\ (a + b)^n - (a - b)^n & (a + b)^n + (a - b)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a + b)^n + (a - b)^n & (a + b)^n - (a - b)^n \\ (a + b)^n - (a - b)^n & (a + b)^n + (a - b)^n \end{pmatrix}$$