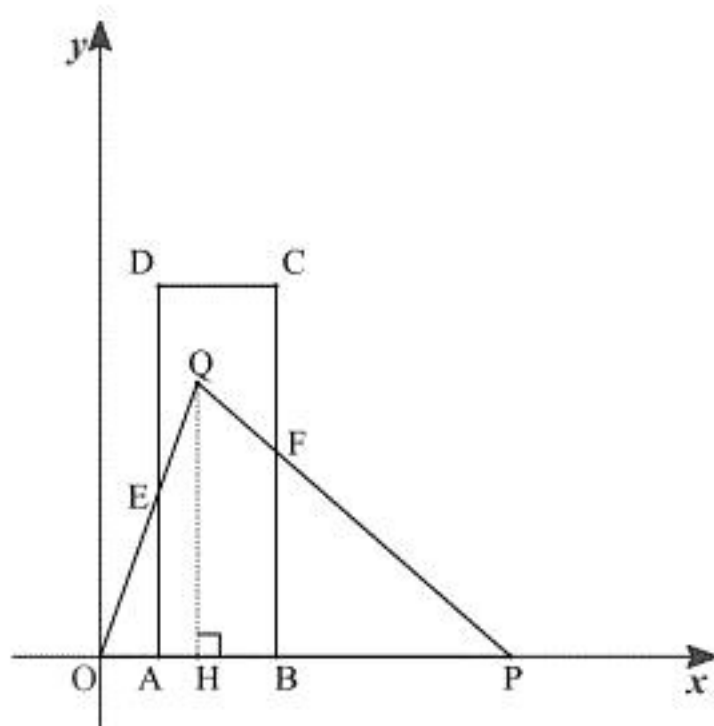


第 1 問

(1)

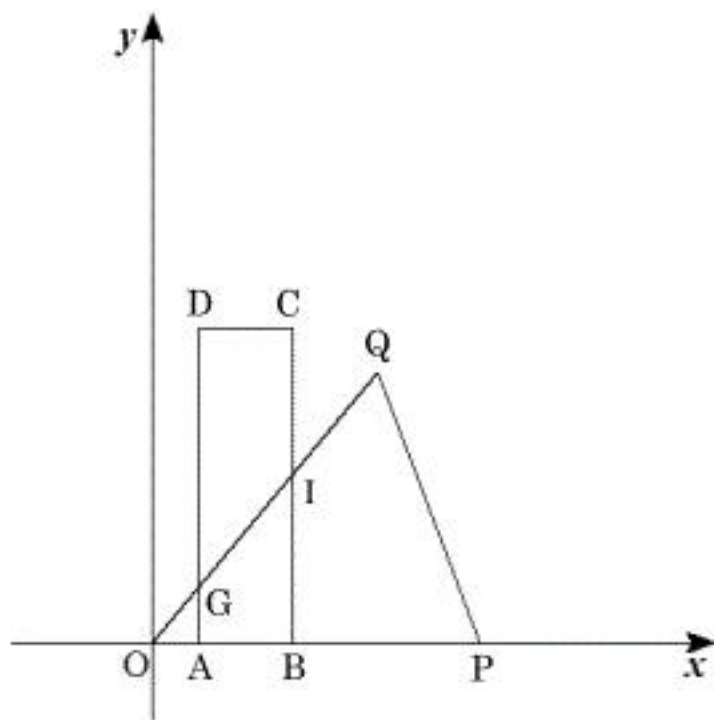
直線 OQ の傾きは $7-t$ となり、点 Q は $t=3$ において点 C と一致するから、 $1 \leq t \leq 3$ において点 Q は長方形 $ABCD$ の周および内部にある。よって、長方形 $ABCD$ と $\triangle OPQ$ の位置関係は下図のようになる。



直線 OQ の方程式は $y=(7-t)x$ となるから、線分 OQ と線分 AD の交点の座標は $(1, 7-t)$ となる。この点を E とおく。また、直線 PQ の方程式は $y=-(x-7)t$ となるから、線分 PQ と線分 BC の交点の座標は $(3, 4t)$ となる。この点を F とおく。また、点 Q から x 軸へ垂直に下した点を H とおくと、求める面積は台形 $AEQH$ と台形 $BFQH$ の面積の和となるから、

$$\begin{aligned} f(t) &= (7t-t^2+7-t) \cdot (t-1) \cdot \frac{1}{2} + (4t+7t-t^2) \cdot (3-t) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(-7t^2+34t-7) \end{aligned}$$

となる。次に、 $3 < t \leq 6$ において点 Q は長方形 $ABCD$ の外部にあるから、長方形 $ABCD$ と $\triangle OPQ$ の位置関係は下図のようになる。



線分 OQ と線分 AD の交点の座標は $(1, 7-t)$ となる。この点を G とおく。また、線分 OQ と線分 BC の交点の座標は $(3, 21-3t)$ となる。この点を I とおくと、求める面積は台形となるので

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \cdot \{(7-t) + (21-3t)\} \cdot 2 \\ &= 28-4t \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 1 \leq t \leq 3 \text{ のとき } f(t) = \frac{1}{2}(-7t^2+34t-7), \quad 3 < t \leq 6 \text{ のとき } f(t) = 28-4t$$

(2)

m は 3 個のさいころを投げたときの、出た目の合計であるから、取りうる値の範囲は

$$3 \leq m \leq 18$$

である。以下、 m の値で場合分けして考える。

[1] $3 \leq m \leq 9$ のとき

$$\begin{aligned} 3m - f\left(\frac{m}{3}\right) &= 3m - \frac{1}{2} \left(-\frac{7}{9}m^2 + \frac{34}{3}m - 7 \right) \\ &= 7m^2 - 48m + 63 \end{aligned}$$

となる。これは $m = \frac{24}{7}$ で最小値をとる 2 次関数であり、 $m=5$ で $7 \cdot 5^2 - 48 \cdot 5 + 63 < 0$ 、

$m=6$ で $7 \cdot 6^2 - 48 \cdot 6 + 63 > 0$ となることに注意すれば、 $f\left(\frac{m}{3}\right) < 3m$ となる m の条件は

$6 \leq m \leq 9$ となることがわかる。

[2] $9 < m \leq 18$ のとき

$$\begin{aligned} 3m - f\left(\frac{m}{3}\right) &= 3m - 28 + \frac{4}{3}m \\ &= \frac{13}{3} \left(m - \frac{84}{13} \right) \end{aligned}$$

となるので、 $9 < m \leq 18$ において $f\left(\frac{m}{3}\right) < 3m$ となる m の条件は $m > \frac{84}{13}$ である。 $\frac{84}{13} < 7$

より求める m の条件は $10 \leq m \leq 18$ となる。

以上[1], [2]より、 $3m - f\left(\frac{m}{3}\right) > 0$ となる m の条件は $6 \leq m \leq 18$ である。以下余事象を考え、

m が $3 \leq m \leq 5$ を満たす確率を求めることにする。

[i] $m=3$ のとき

さいころの出た目が全て 1 であったときであるので、 $m=3$ となる確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

となる。

[ii] $m=4$ のとき

さいころの出た目の 2 つが 1 であり、1 つが 2 であるときであるので、 $m=4$ となる確率は

$${}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{72}$$

となる。

[iii] $m=5$ のとき

さいころの出た目の 2 つが 1 であり、1 つが 3 であるとき、及びさいころの出た目の 2 つが 2 であり、1 つが 1 であるときであるので、 $m=5$ となる確率は

$${}_3C_1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot 2 = \frac{1}{36}$$

となる。

したがって、求める確率は

$$1 - \frac{1}{216} - \frac{1}{72} - \frac{1}{36} = \frac{103}{108}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{103}{108}$$

第2問

(1)

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$, $t\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{OB} - t\overrightarrow{OA}$ であるから, $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} &= t\overrightarrow{OB} - t\overrightarrow{OA} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} &= t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OA}\end{aligned}$$

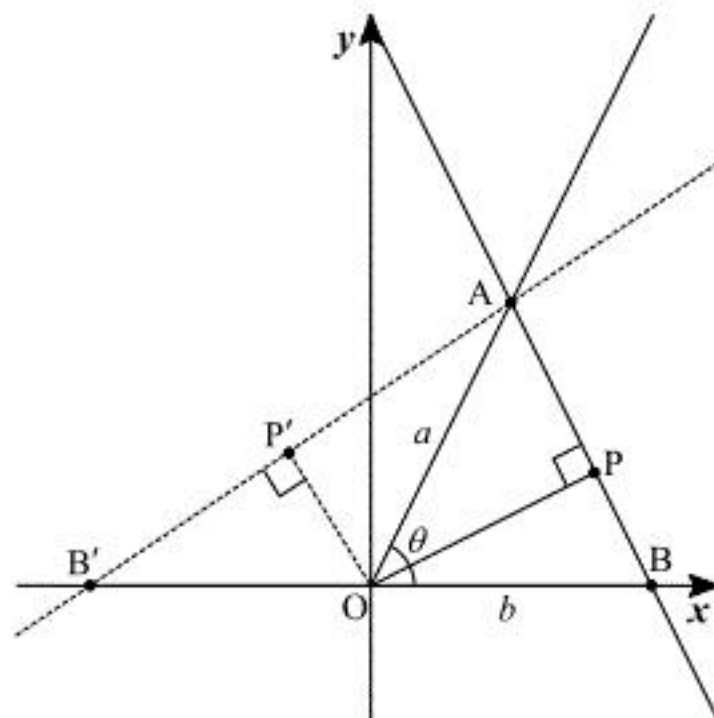
となる。したがって、題意は示された。

また、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, $|\overrightarrow{OA}| = a$, $|\overrightarrow{OB}| = b$ であるが、2つのベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ のなす角は下図より、

点Bのx座標が正($\Leftrightarrow B(b, 0)$)のとき、 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ のなす角は θ

点Bのx座標が負($\Leftrightarrow B(-b, 0)$)のとき、 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ のなす角は $\pi - \theta$

であることがわかる。



以下、点Bのx座標の正負で場合分けして考える。

[1] 点B($b, 0$)のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) &= 0 \\ \Leftrightarrow tb^2 + (1-2t)ab\cos\theta - (1-t)a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a^2 - 2ab\cos\theta + b^2)t &= a^2 - ab\cos\theta\end{aligned}$$

となるため、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、 t は a, b, θ で

$$t = \frac{a^2 - ab\cos\theta}{a^2 - 2ab\cos\theta + b^2} \left(\because a^2 - 2ab\cos\theta + b^2 = (a-b)^2 + 2ab(1-\cos\theta) > 0 \right)$$

と表せる。

[2] 点B($-b, 0$)のとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow (t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) &= 0 \\ \Leftrightarrow tb^2 + (1-2t)ab\cos(\pi - \theta) - (1-t)a^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a^2 + 2ab\cos\theta + b^2)t &= a^2 + ab\cos\theta\end{aligned}$$

となるため、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、 t は a, b, θ で

$$t = \frac{a^2 + ab\cos\theta}{a^2 + 2ab\cos\theta + b^2} \left(\because a^2 + 2ab\cos\theta + b^2 = (a+b)^2 + 2ab(1+\cos\theta) > 0 \right)$$

と表せる。

以上[1], [2]より

$$\begin{cases} \text{点B}(b, 0) \text{ のとき, } t = \frac{a^2 - ab\cos\theta}{a^2 - 2ab\cos\theta + b^2} \\ \text{点B}(-b, 0) \text{ のとき, } t = \frac{a^2 + ab\cos\theta}{a^2 + 2ab\cos\theta + b^2} \end{cases}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \begin{cases} \text{点B}(b, 0) \text{ のとき, } t = \frac{a^2 - ab\cos\theta}{a^2 - 2ab\cos\theta + b^2} \\ \text{点B}(-b, 0) \text{ のとき, } t = \frac{a^2 + ab\cos\theta}{a^2 + 2ab\cos\theta + b^2} \end{cases}$$

(2)

θ を固定し、 $b=1$ とする。以下、点Bのx座標の正負で場合分けして考える。

[1] 点B(1, 0)のとき

このとき

$$t = \frac{a^2 - a\cos\theta}{a^2 - 2a\cos\theta + 1}$$

となるが、 $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OA}$ より、点Pが線分AB上にあるための必要十分条件は

$$0 \leq t \leq 1$$

であるから、以下

$$0 \leq \frac{a^2 - a\cos\theta}{a^2 - 2a\cos\theta + 1} \leq 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす実数 a の範囲を求める。(1)における考察より、(分母) >0 であるから

$$\begin{aligned}\textcircled{1} &\Leftrightarrow 0 \leq a^2 - a\cos\theta \leq a^2 - 2a\cos\theta + 1 \\ &\Leftrightarrow a^2 - (\cos\theta)a \geq 0 \text{ かつ } (\cos\theta)a - 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\theta \leq a \leq \frac{1}{\cos\theta} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)\end{aligned}$$

となる。

[2] 点B(-1, 0)のとき

このとき

$$t = \frac{a^2 + a\cos\theta}{a^2 + 2a\cos\theta + 1}$$

となるが、 $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OA}$ より、点Pが線分AB上にあるための必要十分条件は

$$0 \leq t \leq 1$$

であるから、以下

$$0 \leq \frac{a^2 + a\cos\theta}{a^2 + 2a\cos\theta + 1} \leq 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たす実数 a の範囲を求める。(1)における考察より、(分母) >0 であるから

$$\begin{aligned}\textcircled{2} &\Leftrightarrow 0 \leq a^2 + a\cos\theta \leq a^2 + 2a\cos\theta + 1 \\ &\Leftrightarrow a^2 + (\cos\theta)a \geq 0 \text{ かつ } (\cos\theta)a + 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow a \geq -\cos\theta \text{ かつ } a \geq -\frac{1}{\cos\theta} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)\end{aligned}$$

となるが、 $a > 0$ よりこれは成立する。

以上[1], [2]より

$$\begin{cases} \text{点B}(1, 0) \text{ のとき, } \cos\theta \leq a \leq \frac{1}{\cos\theta} \\ \text{点B}(-1, 0) \text{ のとき, } a > 0 \end{cases}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \begin{cases} \text{点B}(1, 0) \text{ のとき, } \cos\theta \leq a \leq \frac{1}{\cos\theta} \\ \text{点B}(-1, 0) \text{ のとき, } a > 0 \end{cases}$$

(3)

$\triangle OAB$ の面積を点Bのx座標の正負で場合分けして考える。

[1] 点B(1, 0)のとき

$\triangle OAB$ の面積は

$$\frac{1}{2} ab \sin\theta = \frac{1}{2} a \sin\theta$$

であり、(2)より a の取りうる値の範囲は $\cos\theta \leq a \leq \frac{1}{\cos\theta}$ であるから、その最大値は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2} \tan\theta$$

と求まる。

[2] 点B(-1, 0)のとき

$\triangle OAB$ の面積は

$$\frac{1}{2} ab \sin\theta = \frac{1}{2} a \sin\theta$$

であり、(2)より a の取りうる値の範囲は $a > 0$ であるから、その最大値は存在しない。

以上[1], [2]より

$$\begin{cases} \text{点B}(1, 0) \text{ のとき, } \triangle OAB \text{ の最大値は } \frac{1}{2} \tan\theta \\ \text{点B}(-1, 0) \text{ のとき, } \triangle OAB \text{ の最大値は存在しない} \end{cases}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \begin{cases} \text{点B}(1, 0) \text{ のとき, } \triangle OAB \text{ の最大値は } \frac{1}{2} \tan\theta \\ \text{点B}(-1, 0) \text{ のとき, } \triangle OAB \text{ の最大値は存在しない} \end{cases}$$

(4)

(3)において $\triangle OAB$ の最大値が存在するのは、点B(1, 0)のときである。このとき、 $a = \frac{1}{\cos\theta}$ で

あり、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき点Aの座標 $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ は $(1, \sqrt{3})$ となるから

$$\angle ABO = \frac{\pi}{2}$$

であることがわかる。したがって、 $\triangle OAB$ は直角三角形である。

(証明終)

第4問

(1)

与えられた等式より、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d \\ d & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix}$$

であるから、 $d+e=b$ 、 $d-e=c$ が成り立つ。よって $d=\frac{b+c}{2}$ 、 $e=\frac{b-c}{2}$ となる。

$$(\text{答}) \quad d=\frac{b+c}{2}, \quad e=\frac{b-c}{2}$$

(2)

題意より、

$$\begin{aligned} f &= (x \ y) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= a(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

であるから、 $(x, y) \neq (0, 0)$ を満たすすべての x, y に対して $f > 0$ となるための a の条件は、

$$a > 0$$

である。

$$(\text{答}) \quad a > 0$$

(3)

$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ であるから、

$$\begin{aligned} P^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} P &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cos^2 \theta + 2b \cos \theta \sin \theta + a \sin^2 \theta & b \cos^2 \theta - b \sin^2 \theta \\ b \cos^2 \theta - b \sin^2 \theta & a \sin^2 \theta - 2b \cos \theta \sin \theta + a \cos^2 \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + b \sin 2\theta & b \cos 2\theta \\ b \cos 2\theta & a - b \sin 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって

$$a + b \sin 2\theta = z \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b \cos 2\theta = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$a - b \sin 2\theta = w \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ であるため、 $\textcircled{2}$ より $\theta = \frac{\pi}{4}$ となる。これを $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{3}$ に代入するとそれ

ぞれ $z = a + b$ 、 $w = a - b$ となる。

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad z = a + b, \quad w = a - b$$

(4)

(1)より、

$$\begin{aligned} f &= (x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (x \ y) \left\{ \begin{pmatrix} a & d \\ d & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} (x \ y) \begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= exy - exy \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるから、

$$f = (x \ y) \begin{pmatrix} a & d \\ d & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる。(3)より、

$$\begin{pmatrix} a & d \\ d & a \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a-d \end{pmatrix} P^{-1}$$

となるから、

$$\begin{aligned} f &= (x \ y) P \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a-d \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (x \cos \theta + y \sin \theta \quad -x \sin \theta + y \cos \theta) \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a-d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \cos \theta + y \sin \theta \\ -x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで $x \cos \theta + y \sin \theta = X$ 、 $-x \sin \theta + y \cos \theta = Y$ とおくと

$$\begin{aligned} f &= (X \ Y) \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a-d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= (a+d)X^2 + (a-d)Y^2 \end{aligned}$$

となる。 $\theta = \frac{\pi}{4}$ であることより $\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = X$ 、 $-\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = Y$ となり、 X, Y はそれぞれ

0以外の任意の値をとることができるため、 $f > 0$ となる条件は $a+d > 0$ かつ $a-d > 0$ と

なることである。(1)より、 $d = \frac{b+c}{2}$ であるため $f > 0$ となる a の条件は $a > \frac{b+c}{2}$ かつ

$a > -\frac{b+c}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad a > \frac{b+c}{2} \text{ かつ } a > -\frac{b+c}{2}$$