

平成25年度入学者選抜

一般入試 試験問題

情報科学部

試験科目 数 学

試 験 開 始	15:00
試 験 終 了	17:00

【受験上の注意】

- 1 用紙は、すべて試験開始の合図があるまで開かないこと。
- 2 試験開始後、ただちに次のことについて、よく確かめること。
 - ア. 乱丁・落丁のある場合は、試験開始後速やかに手を挙げ、監督者に知らせること。
 - イ. 問題用紙は、全部で8ページである。
 - ウ. 解答用紙は、全部で4枚である。
- 3 解答用紙の氏名欄・受験番号欄は必ず記入すること。
- 4 解答は、所定の欄内にはっきりと記入し、欄外には記入しないこと。
- 5 問題用紙の余白は、メモ又は下書きに利用してよい。
- 6 問題用紙は、持ち帰ること。

第1問

t を $1 \leq t \leq 6$ を満たす実数とする。原点を $O(0, 0)$ とする座標平面上に、点 $A(1, 0)$, $B(3, 0)$, $C(3, 12)$, $D(1, 12)$, $P(7, 0)$, $Q(t, 7t - t^2)$ をとる。長方形 $ABCD$ と $\triangle OPQ$ の共通部分の面積を $f(t)$ とするとき、以下の問いに答えよ。

(1) $f(t)$ を求めよ。

(2) 3 個のさいころを同時に投げて、出た目の合計を m とする。このとき、

$$f\left(\frac{m}{3}\right) < 3m$$

となる確率を求めよ。

(下書用紙)

第2問

座標平面上で、原点 O を始点とし第1象限の点 A を通る半直線 OA と x 軸の正の向きとのなす角を θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) とする。点 B は x 軸上にあり、 $|\overrightarrow{OB}| = b$, $|\overrightarrow{OA}| = a$ とする。原点 O から直線 AB に下ろした垂線と直線 AB との交点を P とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ とおく。 $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OA}$ であることを示し、 t を a , b , θ で表せ。
- (2) θ を固定し $b = 1$ とする。点 P が線分 AB 上に存在するような a の値の範囲を求めよ。
- (3) (2) において、 $\triangle OAB$ の面積の最大値を求めよ。
- (4) (2) において、 $\theta = \frac{\pi}{3}$ とする。面積が最大となる $\triangle OAB$ は直角三角形であることを示せ。

(下書用紙)

第3問

a を $a > 2$ を満たす実数とし,

$$f(t) = \frac{\sin^2 at + t^2}{at \sin at}, \quad g(t) = \frac{\sin^2 at - t^2}{at \sin at} \quad \left(0 < |t| < \frac{\pi}{2a}\right)$$

とする。また, C を曲線 $x^2 - y^2 = \frac{4}{a^2} \left(x \geq \frac{2}{a}\right)$ とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 点 $(f(t), g(t))$ は, 曲線 C 上の点であることを示せ。
- (2) 点 $\left(\lim_{t \rightarrow 0} f(t), \lim_{t \rightarrow 0} g(t)\right)$ における曲線 C の法線の方程式を求めよ。
- (3) 曲線 C と (2) で求めた法線および x 軸とで囲まれた部分を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を $V(a)$ とする。 $V(a)$ を a を用いて表せ。また, $\lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$ を求めよ。

(下書用紙)

第4問

$f = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。ただし、 a, b, c, x, y は実数とする。

- (1) 次の等式を満たす d, e を a, b, c を用いて表せ。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d \\ d & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix}$$

- (2) $b = c = 0$ のとき、 $x = y = 0$ を除くすべての x, y に対して $f > 0$ となる a の条件を求めよ。

- (3) $P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ とし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とする。このとき、次の等式を満たす z, w, θ を求めよ。ただし、 $b \neq 0$ とする。

$$P^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}$$

- (4) (1) と (3) の結果を利用して、 $x = y = 0$ を除くすべての x, y に対して $f > 0$ となる a の条件を b, c を用いて求めよ。

(下書用紙)