

第1問

(1)

$P_A(n) = a \cdot 2^{-(n-3)^2}$ であるとき

$$P_A(1) = \frac{a}{16}, P_A(2) = \frac{a}{2}, P_A(3) = a, P_A(4) = \frac{a}{2}, P_A(5) = \frac{a}{16}$$

となる。 $\sum_{n=1}^5 P_A(n) = 1$ が成り立つことより

$$\begin{aligned} \frac{a}{16} + \frac{a}{2} + a + \frac{a}{2} + \frac{a}{16} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{17}{8}a &= 1 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{8}{17} \end{aligned}$$

である。よって、装置 A で各数字が表示される確率は

$$P_A(1) = \frac{1}{34}, P_A(2) = \frac{4}{17}, P_A(3) = \frac{8}{17}, P_A(4) = \frac{4}{17}, P_A(5) = \frac{1}{34}$$

となり、表示される数字の期待値は

$$1 \times \frac{1}{34} + 2 \times \frac{4}{17} + 3 \times \frac{8}{17} + 4 \times \frac{4}{17} + 5 \times \frac{1}{34} = 3$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P_A(1) = \frac{1}{34}, P_A(2) = \frac{4}{17}, P_A(3) = \frac{8}{17}, P_A(4) = \frac{4}{17}, P_A(5) = \frac{1}{34}, \text{期待値 } 3$$

(2)

$P_B(n) = 2^{-2n+5} \cdot b \cdot 2^{-(n-3)^2}$ であるとき

$$P_B(1) = \frac{b}{2}, P_B(2) = b, P_B(3) = \frac{b}{2}, P_B(4) = \frac{b}{16}, P_B(5) = \frac{b}{512}$$

となる。 $\sum_{n=1}^5 P_B(n) = 1$ が成り立つことより

$$\begin{aligned} \frac{b}{2} + b + \frac{b}{2} + \frac{b}{16} + \frac{b}{512} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1057}{512}b &= 1 \\ \Leftrightarrow b &= \frac{512}{1057} \end{aligned}$$

である。よって、装置 B で各数字が表示される確率は

$$P_B(1) = \frac{256}{1057}, P_B(2) = \frac{512}{1057}, P_B(3) = \frac{256}{1057}, P_B(4) = \frac{32}{1057}, P_B(5) = \frac{1}{1057}$$

となる。(1)の結果を用いて、装置 A と装置 B での表示がどちらも偶数である確率は

$$\begin{aligned} &P_A(2) \cdot P_B(2) + P_A(2) \cdot P_B(4) + P_A(4) \cdot P_B(2) + P_A(4) \cdot P_B(4) \\ &= (P_A(2) + P_A(4))(P_B(2) + P_B(4)) \\ &= \left(\frac{4}{17} + \frac{4}{17}\right) \left(\frac{512}{1057} + \frac{32}{1057}\right) \\ &= \frac{256}{1057} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{256}{1057}$$

(3)

(1)の結果より、 $P_A(n)$ が最大となるときの n の値 m は

$$m = 3$$

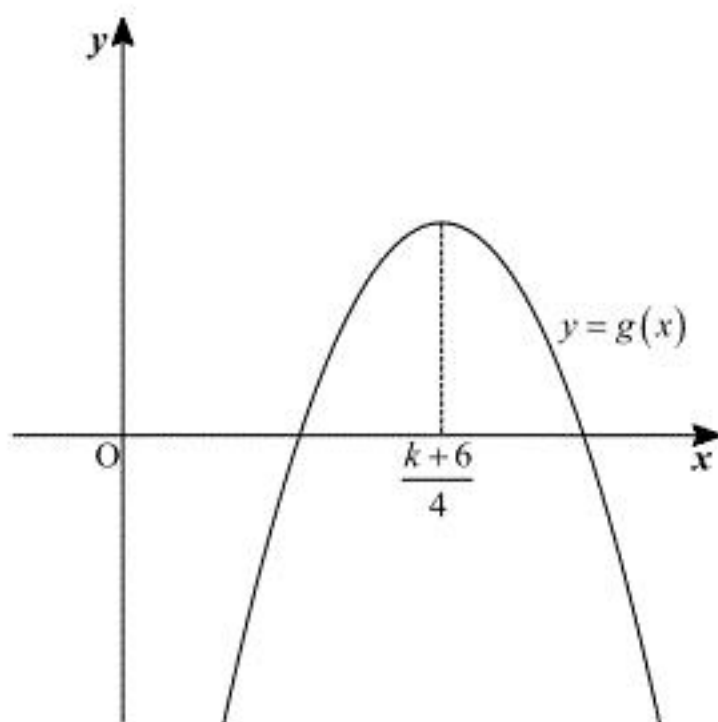
である。一方

$$\begin{aligned} P_C(n) &= 2^{-n^2+kn} \cdot c \cdot 2^{-(n-3)^2} \\ &= c \cdot 2^{-2n^2+(k+6)n-9} \end{aligned}$$

であるとき、 $P_C(n)$ は確率であるから c は正の数である。このとき、 $P_C(n)$ が最大となるのは $2 > 1$ であることより、 $-2n^2 + (k+6)n - 9$ が最大となるときである。

$$\begin{aligned} g(x) &= -2x^2 + (k+6)x - 9 \\ &= -2 \left(x - \frac{k+6}{4} \right)^2 + \frac{(k+6)^2}{8} - 9 \end{aligned}$$

とおくと、 $y = g(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



$P_C(n)$ が最大となる n と m が等しくなるのは、 $\frac{k+6}{4}$ に最も近い整数が m つまり 3 となると

きである。 $\frac{k+6}{4} = \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ のときも含めると、求める k の範囲は、

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} &\leq \frac{k+6}{4} \leq \frac{7}{2} \\ \Leftrightarrow 4 &\leq k \leq 8 \end{aligned}$$

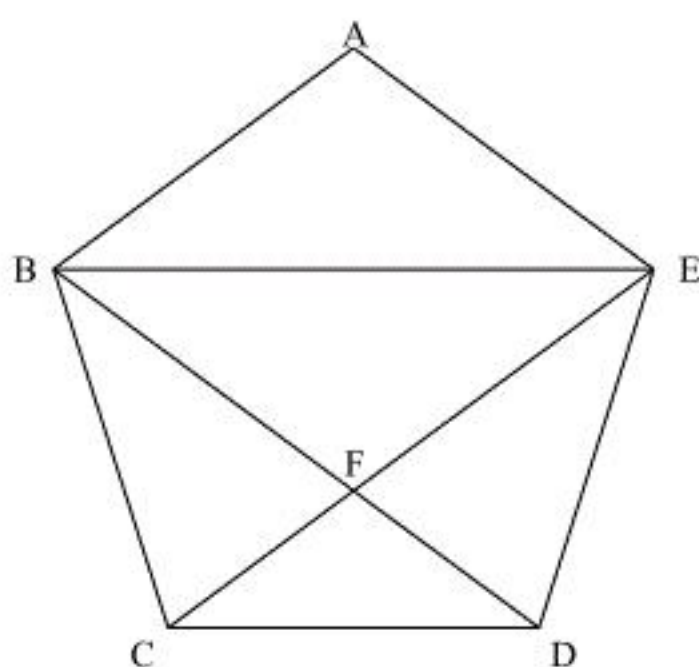
である。

$$(\text{答}) \quad 4 \leq k \leq 8$$

第2問

(1)

1 辺の長さが a_n である正五角形の頂点を反時計回りに A, B, C, D, E とし, 対角線 BD, CE の交点を F とする。



このとき, 対角線の長さは a_{n+1} である。BE//CD より

$$\angle BEF = \angle DCF$$

$$\angle EBF = \angle CDF$$

となり, $\triangle BEF$ と $\triangle DCF$ は相似である。よって

$$BE : DC = BF : DF \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また, AB//EF, AE//BF であることから ABFE は平行四辺形である。よって

$$BF = FE = a_n$$

であり

$$\begin{aligned} DF &= DB - BF \\ &= a_{n+1} - a_n \end{aligned}$$

となる。①より

$$BE : DC = BF : DF$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} : a_n = a_n : (a_{n+1} - a_n)$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}(a_{n+1} - a_n) = a_n^2$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}^2 - a_n a_{n+1} - a_n^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} a_n (>0) \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。よって, 数列 $\{a_n\}$ は初項 a_1 , 公比 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の等比数列となり, 一般項は

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} a_1$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} a_1$$

(2)

$a_n = \frac{x_n + \sqrt{5}y_n}{2}$ と書けるとき, ②より

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} + \sqrt{5}y_{n+1}}{2} &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{x_n + \sqrt{5}y_n}{2} \\ &= \frac{(x_n + 5y_n) + (x_n + y_n)\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

である。数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ は整数であるから, $\frac{x_{n+1}}{2}, \frac{y_{n+1}}{2}, \frac{x_n + 5y_n}{4}, \frac{x_n + y_n}{4}$ は有理数である。よって

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{x_{n+1}}{2} = \frac{x_n + 5y_n}{4} \\ \frac{y_{n+1}}{2} = \frac{x_n + y_n}{4} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_{n+1} = x_n + 5y_n \\ 2y_{n+1} = x_n + y_n \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5y_n = 2x_{n+1} - x_n \\ 10y_{n+1} = 5x_n + 5y_n \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5y_n = 2x_{n+1} - x_n \\ 2(2x_{n+2} - x_{n+1}) = 5x_n + (2x_{n+1} - x_n) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5y_n = 2x_{n+1} - x_n \\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

第3問

(1)

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} (\cos (m+n)x + \cos (m-n)x)$$

である。

[1] $m \neq n$ のとき

m, n が自然数であることに注意すると

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos mx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos (m+n)x + \cos (m-n)x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{m+n} \sin (m+n)x + \frac{1}{m-n} \sin (m-n)x \right]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

[2] $m = n$ のとき

m, n が自然数であることに注意すると

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos mx \cos nx dx &= \int_0^\pi \cos^2 mx dx \\ &= \int_0^\pi \frac{\cos 2mx + 1}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2m} \sin 2mx + x \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^\pi \cos mx \cos nx dx = 0 \quad (m \neq n), \quad \int_0^\pi \cos mx \cos nx dx = \frac{\pi}{2} \quad (m = n)$$

(2)

$\int_a^b \{f(x)\}^2 dx \neq 0, \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \neq 0$ であるとき、任意の実数 t に対して

$$\int_a^b \{tf(x) + g(x)\}^2 dx \geq 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。これより

$$\begin{aligned} \int_a^b \{tf(x) + g(x)\}^2 dx &= \int_a^b \left[t^2 \{f(x)\}^2 + 2tf(x)g(x) + \{g(x)\}^2 \right] dx \\ &= t^2 \int_a^b \{f(x)\}^2 dx + 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \end{aligned}$$

であるから

$$t^2 \int_a^b \{f(x)\}^2 dx + 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \geq 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が任意の実数 t に対して成り立つ。 $\int_a^b \{f(x)\}^2 dx = A, \int_a^b f(x)g(x) dx = B, \int_a^b \{g(x)\}^2 dx = C$ とお

き、 $h(t) = At^2 + 2Bt + C$ とすると

$$\begin{aligned} h(t) &= At^2 + 2Bt + C \\ &= A \left(t + \frac{B}{A} \right)^2 + \frac{AC - B^2}{A} \quad (\because A \neq 0) \end{aligned}$$

となる。 $b > a$ であり、 $\int_a^b \{f(x)\}^2 dx \neq 0$ であるとき

$$A = \int_a^b \{f(x)\}^2 dx > 0$$

となる。 $\textcircled{2}$ を t の2次不等式と見たとき、任意の実数 t に関して成立する条件は

$$\begin{aligned} \frac{AC - B^2}{A} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow AC - B^2 &\geq 0 \quad (\because A > 0) \\ \Leftrightarrow B^2 &\leq AC \end{aligned}$$

である。よって

$$\left\{ \int_a^b f(x)g(x) dx \right\}^2 \leq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx \right) \left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx \right) \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つことが示された。また、等号が成り立つ条件は、 $\textcircled{1}$ において

$$\int_a^b \{tf(x) + g(x)\}^2 dx = 0$$

が成り立つときであり、 $b > a$ より、これは常に

$$\begin{aligned} \{tf(x) + g(x)\}^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow tf(x) + g(x) &= 0 \quad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

が成り立つときである。

[1] $t = 0$ のとき

常に $\textcircled{4}$ が成り立つのは、常に

$$g(x) = 0$$

となるときであるが、これは $\int_a^b \{g(x)\}^2 dx \neq 0$ であることに反する。

[2] $t \neq 0$ のとき

常に $\textcircled{4}$ が成り立つのは

$$g(x) = -tf(x)$$

のときである。

以上、[1], [2]より、等号が成り立つ条件は、 k を定数として $g(x) = kf(x)$ と表せるときである

ことが示された。

(証明終)

(3)

(1)の結果より

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^\pi \cos^2 2x dx &= 2 \int_0^\pi \cos^2 2x dx \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \pi \end{aligned}$$

である。この結果を用いると、 $f(x), \cos 2x$ は区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された連続な関数で、

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^\pi \{f(x)\}^2 dx &= 1 \neq 0 \\ \int_{-\pi}^\pi \{\cos 2x\}^2 dx &= \pi \neq 0 \end{aligned}$$

を満たすから、(2)の結果より $g(x) = \cos 2x, a = -\pi, b = \pi$ として $\textcircled{3}$ が成り立つ。よって、

$I = \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos 2x dx$ のとき

$$\begin{aligned} I^2 &\leq \left(\int_{-\pi}^\pi \{f(x)\}^2 dx \right) \left(\int_{-\pi}^\pi \cos^2 2x dx \right) \\ &= \pi \end{aligned}$$

が成り立つ。等号が成り立つ条件は、(2)の結果より k を定数として

$$f(x) = k \cos 2x$$

と表せるときであり

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^\pi \{f(x)\}^2 dx &= 1 \\ \Leftrightarrow \int_{-\pi}^\pi \{k \cos 2x\}^2 dx &= 1 \\ \Leftrightarrow k^2 \int_{-\pi}^\pi \cos^2 2x dx &= 1 \\ \Leftrightarrow k^2 \pi &= 1 \\ \Leftrightarrow k &= \pm \frac{1}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

となる。よって、 I^2 が最大値 π をとるのは $f(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x$ のときであり、このとき I は最

大値 $\sqrt{\pi}$ 、または、最小値 $-\sqrt{\pi}$ をとり得る。

[1] $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x$ のとき

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x \cos 2x dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \cos^2 2x dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

となり、このとき I は最大値 $\sqrt{\pi}$ をとる。

[2] $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x$ のとき

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^\pi \left(-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x \right) \cos 2x dx \\ &= -\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

となり、このとき I は最小値 $-\sqrt{\pi}$ をとる。

以上、[1], [2]より、 I を最大とする $f(x)$ は $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x$ であり、そのときの I の値は $\sqrt{\pi}$

である。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x \text{ のとき } I = \sqrt{\pi}$$

第4問

(1)

$PH=|x-2|$, $PF=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ である。 $x=2$ のとき, $PH=0$ となるから比 $\frac{PF}{PH}$ の値は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ と

はなり得ない。よって

$$x \neq 2 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。このもとで

$$\begin{aligned} \frac{PF}{PH} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{|x-2|} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2+y^2}{(x-2)^2} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{2}+y^2 &= 1 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。②より

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2}+y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow y^2 &= 1-\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

となり, y が実数であるとき $y^2 \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} 1-\frac{x^2}{2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &\leq 2 \\ \Leftrightarrow |x| &\leq \sqrt{2} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

である。これは①を満たすから, 求める軌跡 C の方程式は②より $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ である。

(答) $C: \frac{x^2}{2}+y^2=1$

(2)

(1)の結果より, (x, y) は②を満たすことに注意すると

$$\begin{aligned} PF+PF' &= \sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2} \\ &= \sqrt{(x-1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)}+\sqrt{(x+1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+4x+4}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x-2|+|x+2|) \end{aligned}$$

となる。さらに, ③より

$$\begin{aligned} PF+PF' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x-2|+|x+2|) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{-(x-2)+(x+2)\} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。よって, $PF+PF'$ は定数となり, その値は $2\sqrt{2}$ である。

(答) $2\sqrt{2}$

(3)

r は原点 O と点 P の距離であるから, ②を用いて

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ &= \sqrt{x^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{x^2}{2}+1} \end{aligned}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{x^2}{2}+1 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 2r^2-2 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} PF \cdot PF' &= \sqrt{(x-1)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x+1)^2+y^2} \\ &= \sqrt{(x-1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)} \cdot \sqrt{(x+1)^2+\left(1-\frac{x^2}{2}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{x^2}{2}-2x+2} \cdot \sqrt{\frac{x^2}{2}+2x+2} \\ &= \sqrt{r^2-2x+1} \cdot \sqrt{r^2+2x+1} \\ &= \sqrt{(r^2+1)^2-4x^2} \\ &= \sqrt{(r^2+1)^2-4(2r^2-2)} \\ &= \sqrt{r^4-6r^2+9} \\ &= |r^2-3| \end{aligned}$$

となる。ここで, ③, ④より

$$\begin{aligned} 2r^2-2 &\leq 2 \\ \Leftrightarrow r^2 &\leq 2 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} PF \cdot PF' &= |r^2-3| \\ &= 3-r^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $PF \cdot PF' = 3-r^2$

(4)

$\triangle PFF'$ について余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{3} &= \frac{PF^2+PF'^2-FF'^2}{2PF \cdot PF'} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= \frac{PF^2+PF'^2-2^2}{2PF \cdot PF'} \\ \Leftrightarrow PF^2+PF'^2-2PF \cdot PF' &= 4=0 \\ \Leftrightarrow (PF+PF')^2-3PF \cdot PF' &= 4=0 \end{aligned}$$

であり, (2), (3)の結果より

$$\begin{aligned} (PF+PF')^2-3PF \cdot PF' &= 4=0 \\ \Leftrightarrow (2\sqrt{2})^2-3(3-r^2) &= 4=0 \\ \Leftrightarrow r^2 &= \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow r &= \sqrt{\frac{5}{3}}(>0) \end{aligned}$$

となる。④より

$$\begin{aligned} x^2 &= 2r^2-2 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となり, 点 P が第1象限にあるとき $x>0$ であるから

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

となる。さらに, ②と点 P が第1象限にあるとき $y>0$ であることより

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{1-\frac{x^2}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

となる。よって, 点 P の座標は $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ である。また, $C: \frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上の点 $P\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ に

おける接線の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y &= 1 \\ \Leftrightarrow x+y &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $r = \sqrt{\frac{5}{3}}$, $P\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, 接線の方程式: $x+y=\sqrt{3}$