

平成 26 年度入学者選抜

一般入試 試験問題

情報科学部

試験科目 数 学

試 験 開 始	15 : 00
試 験 終 了	17 : 00

【受験上の注意】

- 1 用紙は、すべて試験開始の合図があるまで開かないこと。
- 2 試験開始後、ただちに次のことについて、よく確かめること。
 - ア．乱丁・落丁のある場合は、試験開始後速やかに手を挙げ、監督者に知らせること。
 - イ．問題用紙は、全部で 8 ページである。
 - ウ．解答用紙は、全部で 4 枚である。
- 3 解答用紙の氏名欄・受験番号欄は必ず記入すること。
- 4 解答は、所定の欄内にはっきりと記入し、欄外には記入しないこと。
- 5 問題用紙の余白は、メモ又は下書きに利用してよい。
- 6 問題用紙は、持ち帰ること。

第1問

1 から 5 までの 5 つの自然数のうち、いずれかの 1 つの数字が確率的に表示される 3 つの装置 A, B, C がある。各装置 A, B, C で数字 n ($1 \leq n \leq 5$) が表示される確率をそれぞれ $P_A(n)$, $P_B(n)$, $P_C(n)$ とし,

$$\sum_{n=1}^5 P_A(n) = \sum_{n=1}^5 P_B(n) = \sum_{n=1}^5 P_C(n) = 1$$

が成り立っている。 a, b, c, k を実数とし、 $f(n) = 2^{-(n-3)^2}$ とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $P_A(n) = a \cdot f(n)$ であるとき、装置 A で各数字が表示される確率と、表示される数字の期待値を求めよ。
- (2) $P_B(n) = 2^{-2n+5} \cdot b \cdot f(n)$ であるとき、装置 B と (1) で確率を求めた装置 A の表示が、両方とも偶数である確率を求めよ。
- (3) $P_C(n) = 2^{-n^2+kn} \cdot c \cdot f(n)$ であり、(1) の $P_A(n)$ が最大となるときの n を m とする。このとき、 $P_C(n)$ が最大となる n と m が等しくなる k の範囲を求めよ。

(下書用紙)

第2問

1 辺の長さが a_1 の正五角形を P_1 とする。 P_1 の対角線を 1 辺とする正五角形を P_2 とし、 P_2 の対角線を 1 辺とする正五角形を P_3 とする。このように対角線から次の正五角形を繰り返してつくるものとする。このとき、 $n > 1$ における P_n の 1 辺の長さを a_n とし、以下の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を a_1 と n を用いて表せ。

(2) 整数の数列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ を用いて

$$a_n = \frac{x_n + \sqrt{5}y_n}{2}$$

と書けるとする。このとき、 x_{n+2} を x_n と x_{n+1} を用いて表せ。

(下書用紙)

第3問

以下の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\int_0^\pi \cos mx \cos nx \, dx$ を求めよ。ただし、 m, n は自然数とする。

(2) a と b を $a < b$ を満たす実数とし、 $f(x)$ と $g(x)$ を区間 $[a, b]$ で定義された連続な関数とする。また、

$$\int_a^b \{f(x)\}^2 dx \neq 0, \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \neq 0$$

であるとする。このとき、任意の実数 t に対して

$$\int_a^b \{tf(x) + g(x)\}^2 dx \geq 0$$

が成り立つことを用いて、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left\{ \int_a^b f(x)g(x)dx \right\}^2 \leq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx \right) \left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx \right)$$

また、等号が成り立つ条件は、 k を定数として $g(x) = kf(x)$ と表せるときであることを示せ。

(3) $f(x)$ は区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された連続な関数で $\int_{-\pi}^\pi \{f(x)\}^2 dx = 1$ を満たす。このとき、

$$I = \int_{-\pi}^\pi f(x) \cos 2x \, dx$$

を最大とする $f(x)$ とそのときの I の値を求めよ。

(下書用紙)

第4問

座標平面上に点 $P(x, y)$, 点 $F(1, 0)$, 点 $F'(-1, 0)$, および直線 $\ell: x = 2$ がある。点 P から直線 ℓ に下ろした垂線を PH とする。また, 点 P と点 F, F', H との距離を, それぞれ PF, PF', PH とし, 原点 O と点 P の距離を r とする。比 $\frac{PF}{PH}$ の値が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる点 P の軌跡を C とするとき, 以下の問いに答えよ。

(1) C の方程式を求めよ。

(2) $PF + PF'$ は定数となる。その値を求めよ。

(3) $PF \cdot PF'$ を r を用いて表せ。

(4) 点 P は第1象限にあり, $\angle F'PF = \frac{\pi}{3}$ とする。このとき, r の値と点 P の座標を求めよ。また, C 上の求めた点 P における接線の方程式を求めよ。

(下書用紙)