

第1問

(1)

関数 $t = 2^x + 2^{1-x}$ とするとき、その2乗、3乗を計算することで

$$\begin{aligned} t^2 &= (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{1-x} + (2^{1-x})^2 \\ &= 4^x + 4 + 4^{1-x} \\ \therefore 4^x + 4^{1-x} &= t^2 - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^3 &= (2^x)^3 + 3 \cdot (2^x)^2 \cdot 2^{1-x} + 3 \cdot 2^x \cdot (2^{1-x})^2 + (2^{1-x})^3 \\ &= 8^x + 6 \cdot (2^x + 2^{1-x}) + 8^{1-x} \\ &= 8^x + 6t + 8^{1-x} \end{aligned}$$

$$\therefore 8^x + 8^{1-x} = t^3 - 6t$$

が得られる。よって、与えられた関数は t を用いて

$$\begin{aligned} y &= 2(8^x + 8^{1-x}) - 9(4^x + 4^{1-x}) + 24(2^x + 2^{1-x}) - 12 \\ &= 2(t^3 - 6t) - 9(t^2 - 4) + 24t - 12 \\ &= 2t^3 - 9t^2 + 12t + 24 \end{aligned}$$

と表すことができる。

$$(\text{答}) \quad y = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 24$$

(2)

$2^x > 0, 2^{1-x} > 0$ であることから、相加平均・相乗平均の関係より、

$$\begin{aligned} t &= 2^x + 2^{1-x} \\ &\geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{1-x}} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

が成立する。ここで、等号は

$$\begin{aligned} 2^x &= 2^{1-x} \\ \Leftrightarrow x &= 1-x \\ \therefore x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

のときに成立するから、 t は $x = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $2\sqrt{2}$ をとることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値: } t = 2\sqrt{2} \left(x = \frac{1}{2} \right)$$

(3)

(1)の結果より、 y を t について微分すると

$$\frac{dy}{dt} = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t-1)(t-2)$$

となるから、 $t \geq 2\sqrt{2}$ のとき $\frac{dy}{dt} > 0$ が成り立つ。よって、この範囲で y は単調増加するから、

y は $t = 2\sqrt{2}$ において最小値

$$\begin{aligned} y &= 2(2\sqrt{2})^3 - 9(2\sqrt{2})^2 + 12 \cdot 2\sqrt{2} + 24 \\ &= 56\sqrt{2} - 48 \end{aligned}$$

をとることがわかる。したがって、(2)の結果より y は

$$t = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

のとき、最小値 $56\sqrt{2} - 48$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値: } y = 56\sqrt{2} - 48 \left(x = \frac{1}{2} \right)$$

第2問

(1)

点Pが n 秒後に頂点Aにいる確率を p_n 、頂点Bにいる確率を q_n とおくと、問題文より頂点Bと頂点Cを入れ替えても同じ条件となるから、対称性より頂点Cにいる確率も q_n である。点Pは頂点A, B, Cのいずれかの点にあることから、 $n \geq 1$ のとき

$$p_n + 2q_n = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立し、 $n+1$ 秒後に点Pが頂点Aにいるのは、規則(a), (b), (c)より n 秒後に頂点BまたはCにいて確率 $\frac{1}{2}$ で頂点Aに移る場合であるから

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= q_n \cdot \frac{1}{2} + q_n \cdot \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow p_{n+1} = q_n \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が成立する。また、規則(a)より点Pが1秒後に頂点Aにいることはないため

$$p_1 = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となり、 q_1, p_2, q_2 は①, ②, ③より順次

$$\begin{aligned} p_1 + 2q_1 &= 1 \Leftrightarrow q_1 = \frac{1}{2} \\ p_2 &= q_1 = \frac{1}{2} \\ p_2 + 2q_2 &= 1 \Leftrightarrow q_2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad p_1 = 0, q_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{4}$$

(2)

①, ②より q_n を消去すると、 p_{n+1} は p_n を用いて

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - p_n) \quad \cdots \textcircled{4}$$

と表すことができ、①, ④より q_{n+1} は q_n を用いて

$$\begin{aligned} p_{n+1} + 2q_{n+1} &= 1 \\ \Leftrightarrow q_{n+1} &= \frac{1}{2}(1 - p_{n+1}) \\ \therefore q_{n+1} &= \frac{1}{4}(1 + p_n) \end{aligned}$$

と表すことができる。

$$(\text{答}) \quad p_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - p_n), q_{n+1} = \frac{1}{4}(1 + p_n)$$

(3)

p_n について、漸化式③, ④を解けばよい。④より $n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{1}{2}(1 - p_n) \\ \Leftrightarrow p_{n+1} - \frac{1}{3} &= -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right) \\ \therefore p_n - \frac{1}{3} &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

となり、ここで③より $p_1 = 0$ であるから、 p_n は n を用いて

$$p_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

と表せることがわかる。また、この式と②より、 q_n は n を用いて

$$\begin{aligned} q_n &= p_{n+1} \\ &= \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

と表せることがわかる。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}, q_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

(4)

(3)の結果より、それぞれの極限值は

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} = \frac{1}{3} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} q_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{3}, \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{1}{3}$$

第3問

(1)

点Pは平面 α 上にあるから、 $\overrightarrow{OP}$ は2つのベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を用いて表すことができる。各点の z 座標の値に着目することにより

$$(2, -1, 3) = -4(1, 1, 0) + 3(2, 1, 1)$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = -4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = -4\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$$

(2)

平面 α, β の法線ベクトルを $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$ とし、直線 ℓ の方向ベクトルを $\vec{d}$ とおくと、 $\vec{d}$ は2つのベクトル $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$ に対し垂直である。 $\vec{n}_\alpha$ は2つのベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ に対し垂直であるから、内積を考えることにより

$$\vec{n}_\alpha \parallel (1, -1, -1)$$

であることがわかり、点C, Dを $C(0, 1, 1), D(1, 0, 1)$ とおくと、同様にして $\vec{n}_\beta$ は2つのベクトル $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ に対し垂直であるから、内積を考えることにより

$$\vec{n}_\beta \parallel (1, 1, -1)$$

であることがわかる。よって、 $\vec{d}$ は2つのベクトル $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$ に対し垂直であったから、内積を考えることにより

$$\vec{d} \parallel (1, 0, 1)$$

となり、ここで点A, Bの z 座標の値に着目することにより

$$(1, 0, 1) = -(1, 1, 0) + (2, 1, 1)$$

$$\therefore \vec{d} \parallel -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

となる。さらに、直線 ℓ 上に原点 $O(0, 0, 0)$ が存在することも考慮すると、この直線上の点は

$$k(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

と表せることがわかる。

$$(\text{答}) \quad k(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

(3)

点Pから直線 ℓ に垂線を下したときの足を点Hとし、直線 ℓ の方向ベクトル $\vec{d}$ を法線ベクトルとして点Pを通る平面を γ とする。このとき、点Hは平面 γ と直線 ℓ の交点であり、平面 γ を表す方程式は

$$1 \cdot (x-2) + 0 \cdot (y+1) + 1 \cdot (z-3) = 0 \Leftrightarrow x+z-5=0$$

であるから、(2)の結果より直線 ℓ 上の点のパラメーター表示 $k(1, 0, 1)$ を代入することで

$$k+k-5=0$$

$$\therefore k = \frac{5}{2}$$

となるため、点Hの座標は

$$H\left(\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}\right)$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{5}{2}, 0, \frac{5}{2}\right)$$

第4問

(1)

関数 $f(t) = a^{-bt}$ の導関数は、合成関数の微分公式より

$$f'(t) = -(b \log a) a^{-bt}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad f'(t) = -(b \log a) a^{-bt}$$

(2)

$x = f(t) \cos t$, $y = f(t) \sin t$ をそれぞれ t について微分すると、積の微分公式より

$$\frac{dx}{dt} = f'(t) \cos t + f(t) (\cos t)'$$

$$= f'(t) \cos t - f(t) \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = f'(t) \sin t + f(t) (\sin t)'$$

$$= f'(t) \sin t + f(t) \cos t$$

となる。したがって、 $t=0$ から $t=c$ までの間に点 P が動く道のり l は

$$\begin{aligned} l &= \int_0^c \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^c \sqrt{\{f'(t) \cos t - f(t) \sin t\}^2 + \{f'(t) \sin t + f(t) \cos t\}^2} dt \\ &= \int_0^c \sqrt{\{f(t)\}^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) + \{f'(t)\}^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt \\ &= \int_0^c \sqrt{\{f(t)\}^2 + \{f'(t)\}^2} dt \\ &= \sqrt{1 + b^2 (\log a)^2} \int_0^c f(t) dt \quad (\because f(t) > 0) \\ &= \sqrt{1 + b^2 (\log a)^2} \left[-\frac{1}{b \log a} f(t) \right]_0^c \\ &= \frac{1 - a^{-bc}}{b \log a} \sqrt{1 + b^2 (\log a)^2} \end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad l = \frac{1 - a^{-bc}}{b \log a} \sqrt{1 + b^2 (\log a)^2}$$

(3)

$a > 1$, $b > 0$ より $\lim_{c \rightarrow \infty} a^{-bc} = 0$ であるから、(2)の結果より極限值 L は

$$\begin{aligned} L &= \lim_{c \rightarrow \infty} l \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 - a^{-bc}}{b \log a} \sqrt{1 + b^2 (\log a)^2} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{1 + b^2 (\log a)^2}}{b \log a} \quad (\because \lim_{c \rightarrow \infty} a^{-bc} = 0) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad L = \frac{\sqrt{1 + b^2 (\log a)^2}}{b \log a}$$

(4)

(2)の結果より、 $t=0$ から $t=d$ までの間に点 P が動く道のりは

$$\frac{1 - a^{-bd}}{b \log a} \sqrt{1 + b^2 (\log a)^2}$$

であるから、 $a=2$, $b=5$ のとき、この値が $\frac{1}{2}L$ と一致するのは

$$\frac{1 - a^{-bd}}{b \log a} \sqrt{1 + b^2 (\log a)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1 + b^2 (\log a)^2}}{b \log a}$$

$$\Leftrightarrow 1 - a^{-bd} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2^{-5d} = \frac{1}{2} \quad (\because a=2, b=5)$$

$$\therefore d = \frac{1}{5}$$

を満たすときである。

$$(\text{答}) \quad d = \frac{1}{5}$$