

第1問

(1)

$A+B+C+D$ が偶数となるのは、「 A, B, C, D がすべて奇数」または「 A, B, C, D のうち2個が偶数で2個が奇数」または「 A, B, C, D がすべて偶数」のときである。それぞれの確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}, {}_4C_2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}, \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

であり、これらは互いに排反だから、

$$\frac{1}{16} + \frac{6}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}$

(2)

$AB+CD$ が偶数となるのは、「 AB, CD がどちらも奇数」または「 AB, CD がどちらも偶数」
となるときである。2数の積が奇数となる確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

で、2数の積が偶数となる確率は、

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

であるから、求める確率は、

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$$

となる。

(答) $\frac{5}{8}$

(3)

余事象を考える。与えられた式を変形すると、

$$ABC + BCD = BC(A + D)$$

となる。これが5の倍数とならないのは、「 B, C がともに5の倍数とならない」かつ「 $A+D$
が5の倍数とならない」ときである。 B, C がともに5の倍数とならない確率は、

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

で、 $A+D$ が5の倍数とならない確率は、

$$(A, D) = (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 4)$$

とならない確率で、

$$1 - \frac{7}{36} = \frac{29}{36}$$

である。以上より、求める確率は、

$$1 - \frac{25}{36} \cdot \frac{29}{36} = \frac{571}{1296}$$

となる。

(答) $\frac{571}{1296}$

(4)

余事象を考える。 A, B, C, D のうち少なくとも1つが2の倍数である事象を X 、少なくとも1
つが5の倍数である事象を Y とする。 $ABCD$ が10の倍数ではないという事象は $\overline{X \cap Y}$ と表さ
れ、その確率は、

$$\begin{aligned} P(\overline{X \cap Y}) &= P(\overline{X} \cup \overline{Y}) \\ &= P(\overline{X}) + P(\overline{Y}) - P(\overline{X} \cap \overline{Y}) \\ &= \left(\frac{3}{6}\right)^4 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 - \left(\frac{2}{6}\right)^4 \\ &= \frac{81 + 625 - 16}{1296} \\ &= \frac{115}{216} \end{aligned}$$

である。よって、求める確率は、

$$1 - \frac{115}{216} = \frac{101}{216}$$

となる。

(答) $\frac{101}{216}$

第2問

(1)

与えられた条件より、

$$\begin{aligned}\vec{p} &= s\vec{a} + t\vec{b} \\ &= s\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{c} \\ &= \left(1 - \frac{t}{2}\right)\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{c} \quad (\because 2s + t = 2)\end{aligned}$$

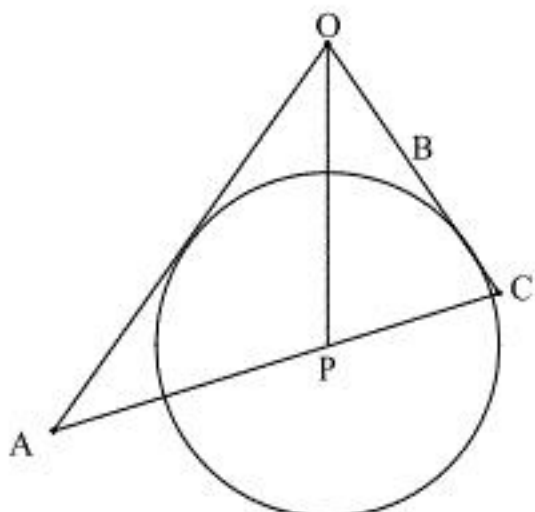
となる。また $s > 0, t > 0$ より、 $t = 2 - 2s$ から、 $0 < t < 2$ である。よって、点 P は線分 AC を

$\frac{t}{2} : \left(1 - \frac{t}{2}\right)$ に内分するから、直線 AC 上にある。

(証明終)

(2)

与えられた条件より、図は以下のようになる。



線分 OP は $\angle AOC$ を二等分するから、

$$AP : PC = OA : OC = 3 : 2$$

である。(1)より、点 P は線分 AC を $\frac{t}{2} : \left(1 - \frac{t}{2}\right)$ に内分するから、

$$\begin{aligned}3 : 2 &= \frac{t}{2} : \left(1 - \frac{t}{2}\right) \\ \Leftrightarrow t &= 3 - \frac{3}{2}t \\ \therefore t &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned}2s + \frac{6}{5} &= 2 \\ \therefore s &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{2}{5}, t = \frac{6}{5}$$

(3)

線分 PQ と線分 OA の交点を点 H とする。(2)より、 $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{6}{5}\vec{b}$ である。また、

$$|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cos \theta$$

である。ここで、

$$\overrightarrow{OH} = \frac{OH}{OA} \overrightarrow{OA}$$

であり、正射影ベクトルの考え方より、

$$\begin{aligned}OH &= \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA}}{OA} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{6}{5}\vec{b} \right) \cdot \vec{a} \\ &= \frac{2}{15} |\vec{a}|^2 + \frac{6}{15} \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{6}{5} (1 + \cos \theta)\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \frac{OH}{OA} \vec{a} \\ &= \frac{2}{5} (1 + \cos \theta) \vec{a}\end{aligned}$$

となる。また、点 H は線分 PQ の中点であるから、

$$\frac{\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}}{2} = \overrightarrow{OH}$$

である。以上より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{4}{5} (1 + \cos \theta) \vec{a} - \left(\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{6}{5}\vec{b} \right) \\ &= \frac{2}{5} (1 + 2 \cos \theta) \vec{a} - \frac{6}{5}\vec{b}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{5} (1 + 2 \cos \theta) \vec{a} - \frac{6}{5}\vec{b}$$

第3問

(1)

$$|t^2 - 2t| = \begin{cases} t^2 - 2t & (t < 0, 2 < t) \\ -t^2 + 2t & (0 \leq t \leq 2) \end{cases}$$

であるから、 $x=0$ のとき $0 \leq t \leq 1$ であり、

$$|t^2 - 2t| = -t^2 + 2t$$

である。よって、

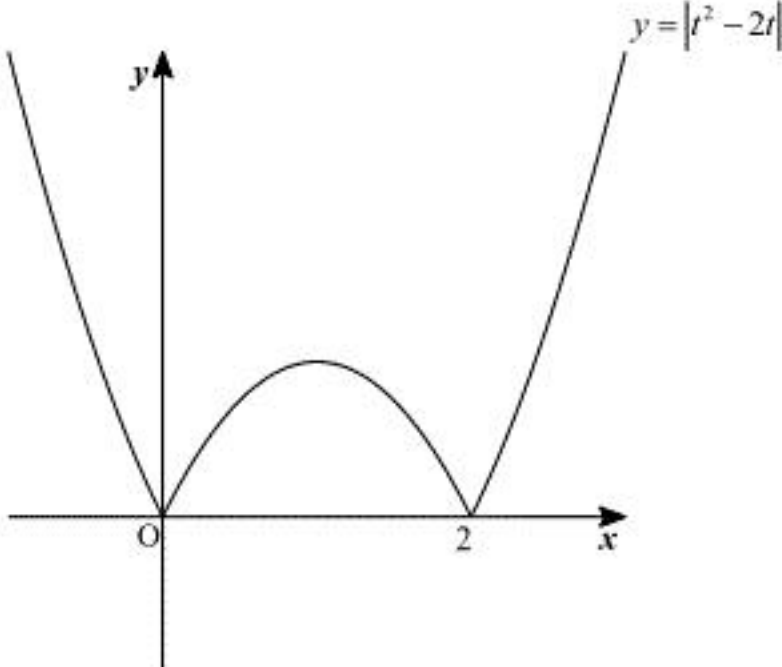
$$\begin{aligned} F(0) &= \int_0^1 (-t^2 + 2t) dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{3} + t^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad F(0) = \frac{2}{3}$$

(2)

$x \leq t \leq x+1$ より、 x の値で場合分けする。



[1] $0 < x < x+1 < 2$ つまり $0 < x < 1$ のとき

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{x+1} (-t^2 + 2t) dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{3} + t^2 \right]_x^{x+1} \\ &= -\frac{(x+1)^3}{3} + (x+1)^2 + \frac{x^3}{3} - x^2 \\ &= -x^2 + x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

[2] $0 < x < 2 \leq x+1$ つまり $1 \leq x < 2$ のとき

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^2 (-t^2 + 2t) dt + \int_2^{x+1} (t^2 - 2t) dt \\ &= \left[-\frac{t^3}{3} + t^2 \right]_x^2 + \left[\frac{t^3}{3} - t^2 \right]_2^{x+1} \\ &= \left(-\frac{8}{3} + 4 + \frac{x^3}{3} - x^2 \right) + \left\{ \frac{(x+1)^3}{3} - (x+1)^2 - \frac{8}{3} + 4 \right\} \\ &= \frac{2}{3}x^3 - x^2 - x + 2 \end{aligned}$$

である。

[3] $2 \leq x < x+1$ つまり $2 \leq x$ のとき

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{x+1} (t^2 - 2t) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - t^2 \right]_x^{x+1} \\ &= \frac{(x+1)^3}{3} - (x+1)^2 - \frac{x^3}{3} + x^2 \\ &= x^2 - x - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

ここで、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\left\{ \frac{2}{3}(1+h)^3 - (1+h)^2 - (1+h) + 2 \right\} - \left(\frac{2}{3} - 1 - 1 + 2 \right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\frac{2}{3}h^3 + h^2 - h}{h} \\ &= -1 \\ \lim_{h \rightarrow +0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\left\{ -(1+h)^2 + (1+h) + \frac{2}{3} \right\} - \left(-1 + 1 + \frac{2}{3} \right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{-h^2 - h}{h} \\ &= -1 \end{aligned}$$

であるので、左極限と右極限が一致し、

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h}$$

となり、同様に、

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \frac{F(2+h) - F(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\left\{ (2+h)^2 - (2+h) - \frac{2}{3} \right\} - \left(4 - 2 - \frac{2}{3} \right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h^2 + 3h}{h} \\ &= 3 \\ \lim_{h \rightarrow +0} \frac{F(2+h) - F(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\left\{ \frac{2}{3}(2+h)^3 - (2+h)^2 - (2+h) + 2 \right\} - \left(\frac{16}{3} - 4 - 2 + 2 \right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\frac{2}{3}h^3 + 3h^2 + 3h}{h} \\ &= 3 \end{aligned}$$

であるので、左極限と右極限が一致し、

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{F(2+h) - F(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{F(2+h) - F(2)}{h}$$

となる。以上より、 $x=1, 2$ のときでも微分可能で、

$$F'(x) = \begin{cases} -2x+1 & (0 < x < 1) \\ 2x^2-2x-1 & (1 \leq x < 2) \\ 2x-1 & (2 \leq x) \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \quad F'(x) = \begin{cases} -2x+1 & (0 < x < 1) \\ 2x^2-2x-1 & (1 \leq x < 2) \\ 2x-1 & (2 \leq x) \end{cases}$$

(3)

(2)より、 $0 < x < 1$ のとき $F'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ 、 $1 \leq x < 2$ のとき $F'\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ 、 $2 \leq x$ のとき常に

$F'(x) > 0$ である。よって、 $F(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1	...	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	...	2	...
$F'(x)$		+	0	-		-	0	+		+
$F(x)$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$

ここで、 $1 \leq x < 2$ のとき、

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2}{3}x^3 - x^2 - x + 2 \\ &= F'(x) \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{6} \right) - x + \frac{11}{6} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) &= F'\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{6} \right\} - \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{11}{6} \\ &= \frac{8-3\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\frac{8-3\sqrt{3}}{6} < \frac{7}{12} < \frac{2}{3} \left(\because \frac{3}{2} < \sqrt{3} \right)$$

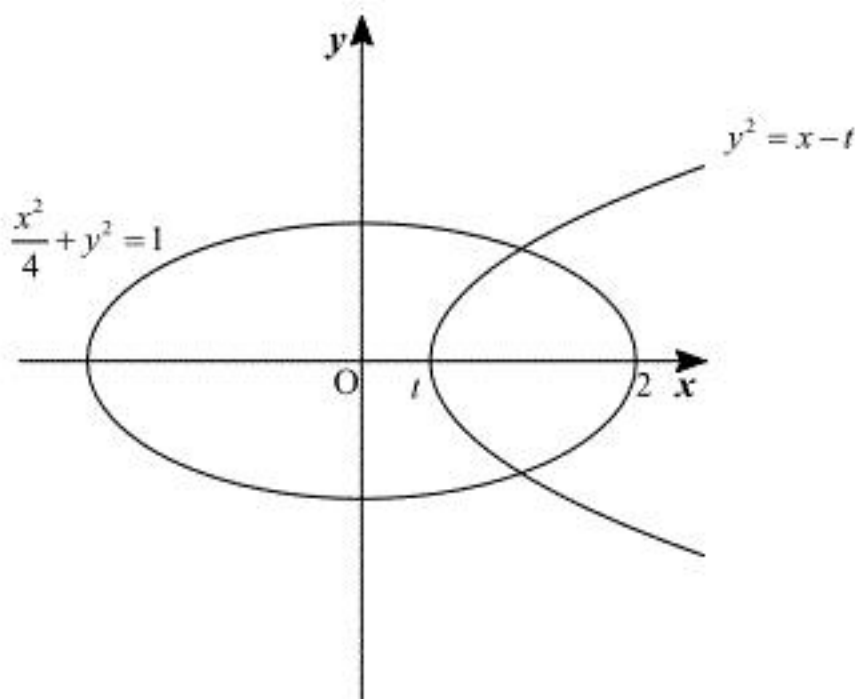
より、 $F(x)$ が最小となるのは $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ のときで、最小値は $\frac{8-3\sqrt{3}}{6}$ となる。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \text{ 最小値 } \frac{8-3\sqrt{3}}{6}$$

第4問

(1)

与えられた楕円と放物線のグラフは以下のようになる。



$t > 0$ と上の図より、楕円と放物線の共有点が2つあるための条件は、 $y^2 = x - t$ の頂点が $0 < x < 2$ の部分にあることで、 t の条件は

$$0 < t < 2$$

である。

(答) $0 < t < 2$

(2)

$y^2 = x - t$ と $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の交点の x 座標を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} + x - t &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4t - 4 &= 0 \\ \therefore x &= -2 \pm \sqrt{t+2} \end{aligned}$$

となる。ここで(1)より、 $t < x < 2$ であるから、 $\sqrt{2} < \sqrt{t+2} < 2$ とあわせて、

$$x = -2 + 2\sqrt{t+2}$$

となる。

(答) $x = -2 + 2\sqrt{t+2}$

(3)

まず、放物線の接線の傾きを求める。上図から、 $0 < t < 2$ のとき $y \neq 0$ で、 $y^2 = x - t$ の両辺を x で微分して、

$$\begin{aligned} 2y \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2y} \end{aligned}$$

となる。(2)より、交点の y 座標は、

$$\pm \sqrt{-2 - t + 2\sqrt{t+2}}$$

であり、これらの接線が直交するとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{-2-t+2\sqrt{t+2}}} \cdot \frac{1}{-2\sqrt{-2-t+2\sqrt{t+2}}} &= -1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4(-2-t+2\sqrt{t+2})} &= 1 \\ \Leftrightarrow 4t+9-8\sqrt{t+2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (4t+9)^2 &= (8\sqrt{t+2})^2 \quad (\because 0 < t < 2) \\ \Leftrightarrow 16t^2+8t-47 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{-1+4\sqrt{3}}{4} \quad (\because 0 < t < 2) \end{aligned}$$

となる。

(答) $t = \frac{-1+4\sqrt{3}}{4}$