

第1問

(1)

$A(\sqrt{3}, 1), B(2, 2\sqrt{3})$ より, $\triangle AOB$ の面積は,

$$\triangle AOB = \frac{1}{2} \left| \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} - 1 \cdot 2 \right| = \frac{1}{2} |6 - 2| = 2$$

となる。同様にして, $A(\sqrt{3}, 1), C(-3, 3\sqrt{3})$ より

$$\triangle AOC = \frac{1}{2} \left| \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} - 1 \cdot (-3) \right| = \frac{1}{2} |9 + 3| = 6$$

であり, $A(\sqrt{3}, 1), D(-1, \frac{1}{\sqrt{3}})$ より

$$\triangle AOD = \frac{1}{2} \left| \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \cdot (-1) \right| = \frac{1}{2} |1 + 1| = 1$$

である。

(答) $\triangle AOB = 2$
 $\triangle AOC = 6$
 $\triangle AOD = 1$

(2)

$S(3) = 0$ となるのは, さいころを3回投げた後点Pが点Aの位置にいるときである。これは, 3回投げて3の倍数が1回も出ないときであるから, その確率は

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

となる。

(答) $\frac{8}{27}$

(3)

(1)より, $S(5) \leq 3$ となるのは, $S(5) = 0, 1, 2$ のときである。これは, $S(5) = 6$ となることの余事象である。ここで, $S(5) = 6$ となるのはさいころを5回投げて点Pが点Cにいるときである。これは, 5回投げて3の倍数が2回または4回出る場合である。したがって, $S(5) = 6$ となる確率は,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^3 \cdot {}_5C_2 + \left(\frac{2}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^1 \cdot {}_5C_4 &= \frac{80}{3^5} + \frac{10}{3^5} \\ &= \frac{90}{3^5} \\ &= \frac{10}{27} \end{aligned}$$

である。よって, $S(5) \leq 3$ となる確率は $1 - \frac{10}{27} = \frac{17}{27}$ である。

(答) $\frac{17}{27}$

第2問

(1)

$$\log_2 \frac{a_n}{a_{n+1}} = 2 + \log_2 \frac{n+1}{n} \quad \cdots \textcircled{1}$$

とする。まず、 a_2 について、 $\textcircled{1}$ に $n=1$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{a_1}{a_2} &= 2 + \log_2 \frac{2}{1} \\ \Leftrightarrow \log_2 \frac{a_1}{a_2} &= 3 \\ \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} &= 8 \\ \therefore a_2 &= \frac{a_1}{8} = \frac{1}{32} \left(\because a_1 = \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

と求められる。次に、 a_3 について、 $\textcircled{1}$ に $n=2$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{a_2}{a_3} &= 2 + \log_2 \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \log_2 \frac{a_2}{a_3} &= \log_2 4 + \log_2 \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \log_2 \frac{a_2}{a_3} &= \log_2 6 \\ \Leftrightarrow \frac{a_2}{a_3} &= 6 \\ \therefore a_3 &= \frac{a_2}{6} = \frac{1}{192} \left(\because a_2 = \frac{1}{32} \right) \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad a_3 = \frac{1}{192}$$

(2)

$\textcircled{1}$ を式変形すると、

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{a_n}{a_{n+1}} &= 2 + \log_2 \frac{n+1}{n} \\ \Leftrightarrow \log_2 \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \log_2 \frac{4(n+1)}{n} \\ \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{4(n+1)}{n} \\ \Leftrightarrow na_n &= 4(n+1)a_{n+1} \quad (\because a_{n+1} \neq 0) \\ \Leftrightarrow (n+1)a_{n+1} &= \frac{1}{4}na_n \end{aligned}$$

である。よって、数列 $\{na_n\}$ は初項 $1 \cdot a_1 = \frac{1}{4}$ 、公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列である。したがって、

$$\begin{aligned} na_n &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4} \right)^n \\ \therefore a_n &= \frac{1}{n \cdot 4^n} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{n \cdot 4^n}$$

(3)

(2) の結果より、 $k^2 a_k = \frac{k}{4^k}$ である。したがって、

$$S_n = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^3 + \cdots + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} + n \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^n \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。ここで、

$$\frac{1}{4} S_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^4 + \cdots + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^n + n \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \quad \cdots \textcircled{3}$$

とする。 $\textcircled{2} - \textcircled{3}$ より、

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} S_n &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{1}{4} \right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4} \right)^n - n \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{4}} - n \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} - \frac{n}{4^{n+1}} \\ \therefore S_n &= \frac{4}{9} - \frac{1}{9 \cdot 4^{n-1}} - \frac{n}{3 \cdot 4^n} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{4}{9} - \frac{1}{9 \cdot 4^{n-1}} - \frac{n}{3 \cdot 4^n}$$

(4)

$(1+h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2$ に $h=3$ を代入すると、

$$4^n \geq 1 + 3n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 9 > \frac{9n(n-1)}{2}$$

となる。よって、 $n \geq 2$ において、

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{4^n} < \frac{2}{9n(n-1)} \\ \Leftrightarrow 0 &< \frac{n}{4^n} < \frac{2}{9(n-1)} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{9(n-1)} = 0$ から、はさみうちの原理より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4^n} = 0$ である。以上より、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{9 \cdot 4^{n-1}} - \frac{n}{3 \cdot 4^n} \right) \\ &= \frac{4}{9} - \frac{1}{9} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0 \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{4}{9}$$

第3問

(1)

部分積分法を用いると、

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^\pi e^x \sin x dx \\ &= \int_0^\pi \left(e^x \right)' \sin x dx \\ &= \left[e^x \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos x dx \\ &= -B_1 \\ B_1 &= \int_0^\pi e^x \cos x dx \\ &= \int_0^\pi \left(e^x \right)' \cos x dx \\ &= \left[e^x \cos x \right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \sin x dx \\ &= -e^\pi - 1 + A_1 \end{aligned}$$

である。以上より、 $A_1 - B_1 = e^\pi + 1$, $A_1 + B_1 = 0$ となる。

$$\begin{aligned} \text{(答)} \quad A_1 + B_1 &= 0 \\ A_1 - B_1 &= e^\pi + 1 \end{aligned}$$

(2)

(1)と同様に、部分積分法を用いると、

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \int_0^\pi e^x x^n \sin x dx \\ &= \int_0^\pi \left(e^x \right)' x^n \sin x dx \\ &= \left[e^x x^n \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \left(nx^{n-1} \sin x + x^n \cos x \right) dx \\ &= -n \int_0^\pi e^x x^{n-1} \sin x dx - \int_0^\pi e^x x^n \cos x dx \\ &= -nA_n - B_{n+1} \\ \therefore A_{n+1} + B_{n+1} &= -nA_n \quad \cdot \cdot \cdot \text{①} \\ B_{n+1} &= \int_0^\pi e^x x^n \cos x dx \\ &= \int_0^\pi \left(e^x \right)' x^n \cos x dx \\ &= \left[e^x x^n \cos x \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \left(nx^{n-1} \cos x - x^n \sin x \right) dx \\ &= -e^\pi \pi^n - n \int_0^\pi e^x x^{n-1} \cos x dx + \int_0^\pi e^x x^n \sin x dx \\ &= -e^\pi \pi^n - nB_n + A_{n+1} \\ \therefore A_{n+1} - B_{n+1} &= e^\pi \pi^n + nB_n \quad \cdot \cdot \cdot \text{②} \end{aligned}$$

となる。①+②より、

$$\begin{aligned} 2A_{n+1} &= -nA_n + nB_n + e^\pi \pi^n \\ \therefore A_{n+1} &= -\frac{n(A_n - B_n)}{2} + \frac{e^\pi \pi^n}{2} \end{aligned}$$

であり、①-②より、

$$\begin{aligned} 2B_{n+1} &= -nA_n - nB_n - e^\pi \pi^n \\ \therefore B_{n+1} &= -\frac{n(A_n + B_n)}{2} - \frac{e^\pi \pi^n}{2} \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} \text{(答)} \quad A_{n+1} &= -\frac{n(A_n - B_n)}{2} + \frac{e^\pi \pi^n}{2} \\ B_{n+1} &= -\frac{n(A_n + B_n)}{2} - \frac{e^\pi \pi^n}{2} \end{aligned}$$

(3)

まず、 A_2, B_2 を求める。(2)より、

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{A_1 - B_1}{2} + \frac{e^\pi \pi}{2} \\ B_2 &= -\frac{A_1 + B_1}{2} - \frac{e^\pi \pi}{2} \end{aligned}$$

となる。(1)より $A_1 - B_1 = e^\pi + 1$, $A_1 + B_1 = 0$ であるから、

$$\begin{cases} A_2 = -\frac{e^\pi + 1}{2} + \frac{e^\pi \pi}{2} = \frac{e^\pi (\pi - 1) - 1}{2} \\ B_2 = -\frac{e^\pi \pi}{2} \end{cases} \quad \cdot \cdot \cdot \text{③}$$

となる。次に、 A_3, B_3 を求める。(2)より、

$$\begin{aligned} A_3 &= -\frac{2(A_2 - B_2)}{2} + \frac{e^\pi \pi^2}{2} = -(A_2 - B_2) + \frac{e^\pi \pi^2}{2} \\ B_3 &= -\frac{2(A_2 + B_2)}{2} - \frac{e^\pi \pi^2}{2} = -(A_2 + B_2) - \frac{e^\pi \pi^2}{2} \end{aligned}$$

である。これに③を代入すると、

$$\begin{aligned} A_3 &= -\left\{ \frac{e^\pi (\pi - 1) - 1}{2} - \left(-\frac{e^\pi \pi}{2} \right) \right\} + \frac{e^\pi \pi^2}{2} \\ &= \frac{e^\pi (\pi^2 - 2\pi + 1) + 1}{2} \\ &= \frac{e^\pi (\pi - 1)^2 + 1}{2} \\ B_3 &= -\left\{ \frac{e^\pi (\pi - 1) - 1}{2} + \left(-\frac{e^\pi \pi}{2} \right) \right\} - \frac{e^\pi \pi^2}{2} \\ &= \frac{e^\pi (1 - \pi^2) + 1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \text{(答)} \quad A_3 &= \frac{e^\pi (\pi - 1)^2 + 1}{2} \\ B_3 &= \frac{e^\pi (1 - \pi^2) + 1}{2} \end{aligned}$$

第4問

(1)

極形式を用いて考える。 $0 \leq \arg \frac{\alpha}{\beta} \leq \pi$ より、 $\frac{\alpha}{\beta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi$) とかける。このとき、

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

となる。一方、

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = 8i = 8\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right\} \quad (n \text{ は整数})$$

である。 $0 \leq 2\theta \leq 2\pi$ より、

$$r^2 = 8, 2\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$$

となる。以上より、 $\frac{\alpha}{\beta} = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = 2 + 2i$ である。

(答) $\frac{\alpha}{\beta} = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = 2 + 2i$

(2)

$\alpha = 5 - i$ のとき、(1)から、

$$\frac{5-i}{\beta} = 2 + 2i$$

$$\therefore \beta = \frac{5-i}{2+2i} = \frac{(5-i)(2-2i)}{2^2+2^2} = \frac{2-3i}{2}$$

である。したがって、 $\triangle ABC$ の重心を表す複素数を ω とおくと、

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{(\alpha + \gamma) + (\beta + \gamma) + \gamma}{3} \\ &= \frac{\alpha + \beta}{3} + \gamma \\ &= \frac{(5-i) + \frac{2-3i}{2}}{3} + (4+i) \\ &= 6 + \frac{1}{6}i\end{aligned}$$

(答) $6 + \frac{1}{6}i$

(3)

$\triangle ODE$ の重心を表す複素数を z とおく。このとき、(2)より

$$\begin{aligned}z &= \frac{0 + \delta\alpha + \delta\beta}{3} \\ &= \frac{\delta(\alpha + \beta)}{3} \\ &= \left(2 - \frac{5}{6}i\right)\delta\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}|\delta| &= 1 \\ \Leftrightarrow \left|2 - \frac{5}{6}i\right||\delta| &= \left|2 - \frac{5}{6}i\right| \\ \Leftrightarrow |z| &= \sqrt{2^2 + \left(-\frac{5}{6}\right)^2} \\ \Leftrightarrow |z| &= \frac{13}{6}\end{aligned}$$

となるから、 $\triangle ODE$ の重心は原点を中心とする半径 $\frac{13}{6}$ の円を描く。

(答) 原点を中心とする半径 $\frac{13}{6}$ の円