

第1問

(1)

それぞれの人が各カードを出す確率は全て等しく $\frac{1}{3}$ であるから、「じゃんけん」を1回行うとき、5人のカードの出し方は全部で $3^5 = 243$ (通り) あり、全て同様に確からしく起こる。「じゃんけん」を1回行って勝者の数が敗者の数より多くなるとき、勝者の数は3人か4人である。このとき、勝者の選び方が ${}_5C_3 + {}_5C_4 = 10 + 5 = 15$ (通り) あり、勝つカードの種類の選び方はそれぞれ3通りずつある。よって、勝者の数が敗者の数より多くなるようなカードの出し方は、 $15 \cdot 3 = 45$ (通り) であるから、求める確率は、 $\frac{45}{243} = \frac{5}{27}$ である。

(答) $\frac{5}{27}$

(2)

余事象を使って考える。出されたカードが1種類であるとき、カードの出し方は3通りある。出されたカードが2種類であるとき、勝つカードの種類の選び方が3通り、勝つ人の選び方が ${}_5C_4 + {}_5C_3 + {}_5C_2 + {}_5C_1 = 5 + 10 + 10 + 5 = 30$ (通り) であるから、カードの出し方は $3 \cdot 30 = 90$ (通り) あり、出されたカードが3種類であるとき、カードの出し方は $243 - (3 + 90) = 150$ (通り) あり、求める確率は $\frac{150}{243} = \frac{50}{81}$ である。

(答) $\frac{50}{81}$

(3)

三角形のカードの勝ち負けで場合分けする。
[1] 三角形カードが勝ち、五角形カードが負けるとき
勝者の数が k であるとき、5枚のカードの並べ方は勝者の選び方に対応するから、並べ方は ${}_5C_k$ 通りとなる。よって勝者の数と x の値とカードの並べ方は以下のように対応する。

勝者の数	敗者の数	x	カードの並べ方
4	1	$3 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 17$	${}_5C_4 = 5$
3	2	$3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 19$	${}_5C_3 = 10$
2	3	$3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 21$	${}_5C_2 = 10$
1	4	$3 \cdot 1 + 5 \cdot 4 = 23$	${}_5C_1 = 5$

このとき、カードの並べ方は全部で $5 + 10 + 10 + 5 = 30$ (通り) あり。
[2] 三角形カードが負け、円形カードが勝つとき
[1]と同様にして、勝者の数と x の値とカードの並べ方は以下のように対応する。

勝者の数	敗者の数	x	カードの並べ方
4	1	$0 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 3$	${}_5C_4 = 5$
3	2	$0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 6$	${}_5C_3 = 10$
2	3	$0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 9$	${}_5C_2 = 10$
1	4	$0 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 12$	${}_5C_1 = 5$

このとき、カードの並べ方は全部で $5 + 10 + 10 + 5 = 30$ (通り) あり。
以上、[1], [2]より、三角形カードを含んで1回で勝敗が確定するとき、変量 x の平均値は、
$$\frac{17 \cdot 5 + 19 \cdot 10 + 21 \cdot 10 + 23 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 10 + 9 \cdot 10 + 12 \cdot 5}{30 + 30} = \frac{825}{60} = 13.75$$
 となる。また、[1], [2]でカードの並べ方がそれぞれ30通りあり、[1]で x の最小値は17、[2]で x の最大値は12だから、中央値は17と12の平均値となる。よって、変量 x の中央値は、
$$\frac{17 + 12}{2} = \frac{29}{2} = 14.5$$
 となる。

(答) 平均値：13.75、中央値：14.5

第2問

(1)

a, b, c を実数として、 $\overrightarrow{\text{OD}}=a\overrightarrow{\text{OA}}+b\overrightarrow{\text{OB}}+c\overrightarrow{\text{OC}}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OD}} &= a\overrightarrow{\text{OA}}+b\overrightarrow{\text{OB}}+c\overrightarrow{\text{OC}} \\ &= a(1, 0, 2)+b(1, 1, 0)+c(1, 4, 3) \\ &= (a+b+c, b+4c, 2a+3c)\end{aligned}$$

となる。また、定義より、 $\overrightarrow{\text{OD}}=(3, 0, 0)$ であるから、

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ b+4c=0 \\ 2a+3c=0 \end{cases}$$

となる。これを解いて、 $a=1, b=\frac{8}{3}, c=-\frac{2}{3}$ となるから、

$$\overrightarrow{\text{OD}}=\overrightarrow{\text{OA}}+\frac{8}{3}\overrightarrow{\text{OB}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\text{OC}}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{\text{OD}}=\overrightarrow{\text{OA}}+\frac{8}{3}\overrightarrow{\text{OB}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\text{OC}}$$

(2)

点Eは点Aを中心として点Bを通る球面上の点であるから、 $|\overrightarrow{\text{AE}}|=|\overrightarrow{\text{AB}}|$ である。ここで、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\text{AB}}| &= \sqrt{(1-1)^2+(1-0)^2+(0-2)^2} = \sqrt{0+1+4} = \sqrt{5} \\ |\overrightarrow{\text{AE}}| &= \sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(1-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2+1}\end{aligned}$$

であるから、

$$(x-1)^2+y^2+1=5 \qquad \cdots \text{①}$$

である。また、 $\angle \text{BAE}=60^\circ$ であるから、

$$\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AE}} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos 60^\circ = \frac{5}{2}$$

であり、一方で $\overrightarrow{\text{AB}}=(0, 1, -2), \overrightarrow{\text{AE}}=(x-1, y, -1)$ より、

$$\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AE}} = 0 \cdot (x-1) + 1 \cdot y - 2 \cdot (-1) = y+2$$

となるから、

$$\begin{aligned}y+2 &= \frac{5}{2} \\ \therefore y &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

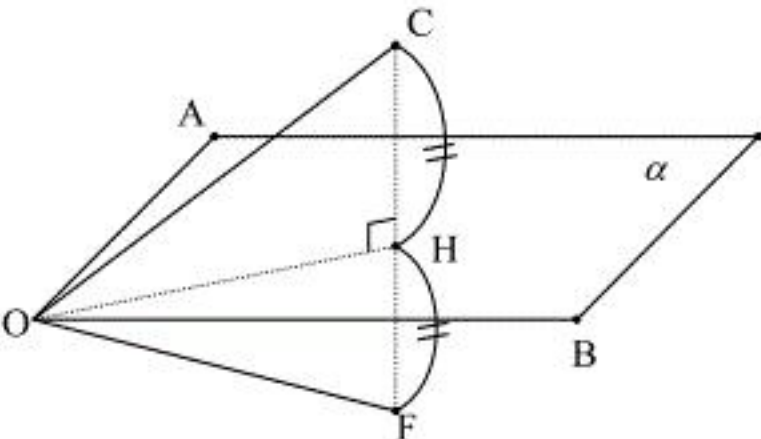
となる。これを①に代入して、

$$\begin{aligned}(x-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1 &= 5 \\ \Leftrightarrow 4x^2-8x-11 &= 0 \\ \therefore x &= \frac{2\pm\sqrt{15}}{2}\end{aligned}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad x=\frac{2\pm\sqrt{15}}{2}, y=\frac{1}{2}$$

(3)



上図のように点Cから平面 α に下ろした垂線の足を点Hとする。点Hは平面 α 上の点であるから、ある実数 s, t を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OH}} &= s\overrightarrow{\text{OA}}+t\overrightarrow{\text{OB}} \\ &= s \cdot (1, 0, 2)+t \cdot (1, 1, 0) \\ &= (s+t, t, 2s)\end{aligned}$$

と表せる。よって、

$$\overrightarrow{\text{CH}}=\overrightarrow{\text{OH}}-\overrightarrow{\text{OC}}=(s+t-1, t-4, 2s-3)$$

であり、 $\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}$ との内積をそれぞれ計算すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OA}} \cdot \overrightarrow{\text{CH}} &= 1 \cdot (s+t-1)+0 \cdot (t-4)+2 \cdot (2s-3) \\ &= 5s+t-7 \\ \overrightarrow{\text{OB}} \cdot \overrightarrow{\text{CH}} &= 1 \cdot (s+t-1)+1 \cdot (t-4)+0 \cdot (2s-3) \\ &= s+2t-5\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\overrightarrow{\text{OA}} \perp \overrightarrow{\text{CH}}, \overrightarrow{\text{OB}} \perp \overrightarrow{\text{CH}}$ であるから、

$$\begin{cases} 5s+t-7=0 \\ s+2t-5=0 \end{cases}$$

となる。これを解いて、 $s=1, t=2$ となるから、 $\overrightarrow{\text{CH}}=(2, -2, -1)$ である。したがって、点Fの定義より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{OF}} &= \overrightarrow{\text{OC}}+2\overrightarrow{\text{CH}} \\ &= (1, 4, 3)+2 \cdot (2, -2, -1) \\ &= (5, 0, 1)\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{\text{OF}}=(5, 0, 1)$$

第3問

(1)

F_1 を計算すると、

$$F_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s e^{-t} dt = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[-e^{-t} \right]_0^s = \lim_{s \rightarrow \infty} (1 - e^{-s}) = 1 - \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-s}$$

となり、 $e > 1$ であるから、 $\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-s} = 0$ である。よって、 $F_1 = 1$ である。

(答) $F_1 = 1$

(2)

部分積分法を用いて F_{n+1} を計算すると、

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s e^{-t} t^n dt \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \left[-e^{-t} t^n \right]_0^s - \int_0^s (-e^{-t}) (t^n)' dt \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \left(-\frac{s^n}{e^s} \right) + \lim_{s \rightarrow \infty} n \int_0^s e^{-t} t^{n-1} dt \\ &= nF_n \left(\because \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^n}{e^s} = 0 \right) \end{aligned}$$

となる。

(答) $F_{n+1} = nF_n$

(3)

(2)で求めた関係式を繰り返し使うと、

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= nF_n \\ &= n \cdot (n-1)F_{n-1} \\ &= \dots \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \cdot F_1 \\ &= n! \left(\because F_1 = 1 \right) \end{aligned}$$

となる。

(答) $F_{n+1} = n!$

(4)

$\int_0^s e^{-nt} t^n dt$ について、 $nt = x$ と置換すると、 $n \geq 1$ であるから、 $t = \frac{x}{n}$ であり、 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{n}$ となる。また、積分範囲は以下のように対応する。

t	0	$\rightarrow$	s
x	0	$\rightarrow$	ns

以上より、 G_n は、

$$\begin{aligned} G_n &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^s e^{-nt} t^n dt \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{ns} e^{-x} \left(\frac{x}{n} \right)^n \cdot \frac{dx}{n} \\ &= \frac{1}{n^{n+1}} \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{ns} e^{-x} x^n dx \end{aligned}$$

となる。 $s \rightarrow \infty$ のとき、 $ns \rightarrow \infty$ であるから、 $ns = u$ とすると、

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{ns} e^{-x} x^n dx &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u e^{-x} x^n dx \\ &= F_{n+1} \\ &= n! \end{aligned}$$

であるから、

$$G_n = \frac{1}{n^{n+1}} \cdot n! = \frac{(n-1)!}{n^n}$$

となる。

(答) $G_n = \frac{(n-1)!}{n^n}$

(5)

$G_n = \frac{(n-1)!}{n^n}$ について、 n は自然数であるから、

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{(n-1)!}{n^n} \leq \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} < \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n} \\ \therefore 0 &< G_n < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから、はさみうちの原理より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = 0$ となる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = 0$

第4問

(1)

与えられた等式より,

$$z+\frac{1}{z}=1$$

$$\Leftrightarrow z^2+1=z$$

$$\Leftrightarrow z^2-z+1=0$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore z=\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) \text{ (複号同順)}$$

と変形できる。ここで、 $0\leq \arg z\leq \pi$ より、求める z は、 $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ である。

(答) $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

(2)

$z^3=\cos\pi+i\sin\pi=-1$ となることに注意すると,

$$\begin{aligned} z+z^2+z^3+z^4+z^5 &= z+z^2+z^3+z^3\cdot z+z^3\cdot z^2 \\ &= z+z^2-1-z-z^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

と求められる。

(答) -1

(3)

$z^2-z+1=0\Leftrightarrow z^2-z=-1$ であることに注意して、題意より,

$$\begin{aligned} \delta &= z+\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(\gamma-z) \\ &= z+\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)(z^2-z) \\ &= z-\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)-\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= \frac{1-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $\delta=\frac{1-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}i$