

第 1 問

(1)

$f(x)=0$ の解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-a \\ \alpha\beta=1 \end{cases}$$

となる。ここで、2 次方程式 $g(x)=0$ の解は $\alpha-\frac{1}{2}, \beta-\frac{1}{2}$ であるから、0 ではない実数 b を用いて、

$$\begin{aligned} g(x) &= b\left(x-\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(x-\beta+\frac{1}{2}\right) \\ &= b\left\{x^2-(\alpha+\beta-1)x+\alpha\beta-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{1}{4}\right\} \\ &= b\left\{x^2+(a+1)x+\frac{1}{2}a+\frac{5}{4}\right\} \end{aligned}$$

となる。このとき $g'(x)=2b$ となるから、 $g'(0)=4$ より、

$$2b=4 \Leftrightarrow b=2$$

となる。よって、

$$g(x)=2\left\{x^2+(a+1)x+\frac{1}{2}a+\frac{5}{4}\right\}$$

となるから、

$$\begin{aligned} g(x)-f(x) &= 2\left\{x^2+(a+1)x+\frac{1}{2}a+\frac{5}{4}\right\}-(x^2+ax+1) \\ &= x^2+(a+2)x+a+\frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $g(x) \geq f(x) \Leftrightarrow g(x)-f(x) \geq 0$ であるから、 $x^2+(a+2)x+a+\frac{3}{2}=0$ の判別式を D とすると、 $D \leq 0$ となればよい。よって、求める a の範囲は、

$$\begin{aligned} D &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (a+2)^2-4\left(a+\frac{3}{2}\right) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow a^2-2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow -\sqrt{2} &\leq a \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$

(2)

$h(n)$ に $n=1, 2$ を代入して、

$$\begin{aligned} h(1) &= \int_1^1 g(x)dx - \sum_{k=1}^1 f(k) \\ &= 0 - f(1) \\ &= -a - 2 \\ h(2) &= \int_1^2 g(x)dx - \sum_{k=1}^2 f(k) \\ &= \int_1^2 2\left\{x^2+(a+1)x+\frac{1}{2}a+\frac{5}{4}\right\}dx - \{f(1)+f(2)\} \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3+(a+1)x^2+\left(a+\frac{5}{2}\right)x\right]_1^2 - \{(a+2)+(2a+5)\} \\ &= \left\{\frac{14}{3}+(3a+3)+\left(a+\frac{5}{2}\right)\right\} - (3a+7) \\ &= a + \frac{19}{6} \end{aligned}$$

となる。

(答) $h(1)=-a-2, h(2)=a+\frac{19}{6}$

(3)

$$a=-\frac{8}{3} \text{ であるとき、全ての自然数 } n \text{ に対して、} h(n) \geq 0 \text{ となること} \quad \cdots \textcircled{1}$$

を示せばよい。数学的帰納法を利用して、 $\textcircled{1}$ を示す。

[1] $n=1, 2$ のとき

(2) の結果より、

$$\begin{aligned} h(1) &= -\left(-\frac{8}{3}\right) - 2 = \frac{2}{3} > 0 \\ h(2) &= -\frac{8}{3} + \frac{19}{6} = \frac{1}{2} > 0 \end{aligned}$$

となる。よって、 $n=1, 2$ のとき $\textcircled{1}$ が成り立つ。

[2] $n=l$ のとき (l は 2 以上の自然数)

$h(l) \geq 0$ が成り立つと仮定すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - \frac{8}{3}x + 1 \\ g(x) &= 2x^2 - \frac{10}{3}x - \frac{1}{6} \\ \text{より、} \\ h(l+1) &= \int_1^{l+1} g(x)dx - \sum_{k=1}^{l+1} f(k) \\ &= \int_1^l g(x)dx - \sum_{k=1}^l f(k) + \int_l^{l+1} g(x)dx - f(l+1) \\ &= h(l) + \int_l^{l+1} \left(2x^2 - \frac{10}{3}x - \frac{1}{6}\right)dx - f(l+1) \\ &= h(l) + \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - \frac{1}{6}x\right]_l^{l+1} - \left\{(l+1)^2 - \frac{8}{3}(l+1) + 1\right\} \\ &= h(l) + \frac{2}{3}(3l^2+3l+1) - \frac{5}{3}(2l+1) - \frac{1}{6} - (l+1)^2 + \frac{8}{3}(l+1) - 1 \\ &= h(l) + l^2 - \frac{2}{3}l - \frac{1}{2} \\ &= h(l) + \left(l - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{11}{18} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$i(l) = \left(l - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{11}{18}$$

とすると、放物線 $i(l)$ の軸は $l=\frac{1}{3}$ であり、 $l \geq 2$ であるから、 $i(l) \geq i(2)$ となる。また、

$$i(2) = \frac{13}{6} \text{ より、} l \geq 2 \text{ の範囲で } i(l) \geq 0 \text{ であるから、}$$

$$h(l+1) = h(l) + i(l) \geq 0$$

となる。

以上、[1], [2] より、題意は示された。

(証明終)

第2問

(1)

$s = \frac{3}{x}$ とすると, $x \rightarrow \infty$ のとき $s \rightarrow 0$ である。これより,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{\frac{1}{3}}} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} (1+s)^{\frac{1}{s^3}} \\ &= e^3\end{aligned}$$

となる。

(答) e^3

(2)

$t = -\frac{a}{x}$ とすると, $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow 0$ である。これより,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^x} (x-a)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{x}\right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{\frac{1}{a}}(-a)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}(-a)} \\ &= e^{-a}\end{aligned}$$

となる。

(答) e^{-a}

(3)

$c = e^{-a}$ より,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T c^x \cos x dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-ax} \cos x dx$$

である。また,

$$\frac{d}{dx} (e^{-ax} \cdot \sin x) = -a \cdot e^{-ax} \cdot \sin x + e^{-ax} \cdot \cos x \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{d}{dx} (e^{-ax} \cdot \cos x) = -e^{-ax} \cdot \sin x - a \cdot e^{-ax} \cdot \cos x \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。① $-a \times$ ② より,

$$\frac{d}{dx} (e^{-ax} \cdot \sin x - a \cdot e^{-ax} \cdot \cos x) = (a^2 + 1) \cdot e^{-ax} \cdot \cos x$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-ax} \cos x dx &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{a^2 + 1} [e^{-ax} \cdot \sin x - a \cdot e^{-ax} \cdot \cos x]_0^T \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{e^{-aT}}{a^2 + 1} (\sin T - a \cdot \cos T) \right)\end{aligned}$$

となる。ここで,

$$-e^{-aT} \leq e^{-aT} \sin T \leq e^{-aT}$$

$$-e^{-aT} \leq e^{-aT} \cos T \leq e^{-aT}$$

であり, a が正の実数より,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-aT} = 0$$

であるから, はさみうちの原理より,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-aT} \sin T = 0$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-aT} \cos T = 0$$

となる。したがって,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-ax} \cos x dx = \frac{a}{a^2 + 1}$$

となる。

(答) $\frac{a}{a^2 + 1}$

第3問

(1)

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)}{r(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta)} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{(\cos \theta - i \sin \theta)}{r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) i \sin \theta \\
 &= a \cos \theta + b i \sin \theta
 \end{aligned}$$

となる。

(答) 実部： $a \cos \theta$ ，虚部： $b \sin \theta$

(2)

(1)より， C 上の点は $u = a \cos \theta + b i \sin \theta$ と表すことができる。すると， $\bar{u} = a \cos \theta - b i \sin \theta$ である。よって，

$$\begin{aligned}
 (u + \bar{u})^2 - 4a^2 u \bar{u} &= (2a \cos \theta)^2 - 4a^2 (a \cos \theta + b i \sin \theta)(a \cos \theta - b i \sin \theta) \\
 &= 4a^2 \cos^2 \theta - 4a^2 (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta) \\
 &= 4a^2 (\cos^2 \theta - a^2 \cos^2 \theta - b^2 \sin^2 \theta)
 \end{aligned}$$

となる。ここで，

$$b^2 = \frac{1}{4} \left(r^2 - 2 + \frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{4} \left(r^2 + 2 + \frac{1}{r^2} \right) - 1 = a^2 - 1$$

であるから，

$$\begin{aligned}
 (u + \bar{u})^2 - 4a^2 u \bar{u} &= 4a^2 \{ \cos^2 \theta - a^2 \cos^2 \theta - (a^2 - 1) \sin^2 \theta \} \\
 &= 4a^2 \{ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - a^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \} \\
 &= 4a^2 (1 - a^2)
 \end{aligned}$$

となる。よって，題意は示された。

(証明終)

(3)

αu が表す点は C 上の点であるから，

$$(\alpha u + \overline{\alpha u})^2 - 4a^2 \alpha u \overline{\alpha u} = 4a^2 (1 - a^2)$$

となる。ここで，

$$\begin{aligned}
 (\alpha u + \overline{\alpha u})^2 - 4a^2 \alpha u \overline{\alpha u} &= (\alpha u + \overline{\alpha u})^2 - 4a^2 \alpha \cdot u \cdot \bar{\alpha} \cdot \bar{u} \\
 &= (\alpha u + \overline{\alpha u})^2 - 4a^2 u \bar{u}
 \end{aligned}$$

となる。また，(2)より，

$$(u + \bar{u})^2 - 4a^2 u \bar{u} = 4a^2 (1 - a^2)$$

である。以上から，

$$\begin{aligned}
 (u + \bar{u})^2 - 4a^2 u \bar{u} &= (\alpha u + \overline{\alpha u})^2 - 4a^2 u \bar{u} \\
 \Leftrightarrow (u + \bar{u})^2 &= (\alpha u + \overline{\alpha u})^2 \\
 \Leftrightarrow \{ (u + \bar{u}) + (\alpha u + \overline{\alpha u}) \} \{ (u + \bar{u}) - (\alpha u + \overline{\alpha u}) \} &= 0 \\
 \Leftrightarrow u + \bar{u} &= \pm (\alpha u + \overline{\alpha u})
 \end{aligned}$$

となる。 $u + \bar{u}$ ， $\alpha u + \overline{\alpha u}$ はそれぞれ u ， αu の実部の2倍である。よって，

$$\begin{aligned}
 u + \bar{u} &= \pm (\alpha u + \overline{\alpha u}) \\
 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\alpha u) &= \operatorname{Re}(u) \text{ または } \operatorname{Re}(\alpha u) = -\operatorname{Re}(u)
 \end{aligned}$$

となる。以上から，題意を示せた。

(証明終)

第4問

(1)

右から順番に文字を決めて並べていくとすると、それぞれの文字について2通りずつの選び方が存在する。よって、その並べ方は 2^n 通りとなる。

(答) 2^n 通り

(2)

(1)のうち、一方の文字のみ現れるのは全てRの場合と全てGの場合の2通りである。どの文字も1回以上現れる並べ方はこれの余事象であるから、

$$2^n - 2 = 2(2^{n-1} - 1) \text{ (通り)}$$

となる。

(答) $2(2^{n-1} - 1)$ 通り

(3)

現れる文字の個数について考えないときには、(1)と同様に考えて、 3^n 通りとなる。1つの文字のみ現れるのは全てRの場合と全てGの場合と全てBの場合の3通りである。2つの文字のみ現れるのは、どの文字が現れるかを選ぶのに ${}_3C_2 = 3$ 通り存在し、その並べ方は(2)より

$2(2^{n-1} - 1)$ 通り存在する。どの文字も1回以上現れる並べ方はこれらの余事象であるから、

$$3^n - 3 - 3 \cdot 2(2^{n-1} - 1) = 3(3^{n-1} - 2^n + 1) \text{ (通り)}$$

となる。

(答) $3(3^{n-1} - 2^n + 1)$ 通り

(4)

n 回カードを引くので、このカードの引き方は 4^n 通りであり、これらは同様に確からしい。このうち、題意を満たす引き方の場合の数を考える。これは n 回目にひくカードの種類を決めるのに4通り存在し、 $n-1$ 回目までには残りの3枚を少なくとも1回は引く引き方であるから、(3)より $3(3^{n-2} - 2^{n-1} + 1)$ 通りである。よって、求める確率は、

$$\frac{4 \cdot 3(3^{n-2} - 2^{n-1} + 1)}{4^n} = \frac{3(3^{n-2} - 2^{n-1} + 1)}{4^{n-1}}$$

となる。

(答) $\frac{3(3^{n-2} - 2^{n-1} + 1)}{4^{n-1}}$