

問 1

$$y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$$

について

$$y' = -3x^2 + 12x - 9$$

であることより、点 $(t, -t^3 + 6t^2 - 9t + 4)$ における接線を l_t とおくと、その方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (-3t^2 + 12t - 9)(x - t) - t^3 + 6t^2 - 9t + 4 \\ &= (-3t^2 + 12t - 9)x + 2t^3 - 6t^2 + 4 \end{aligned}$$

となる。これが点 $(0, -4)$ を通るとき、

$$\begin{aligned} -4 &= 2t^3 - 6t^2 + 4 \\ \Leftrightarrow (t+1)(t-2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= -1, 2 \end{aligned}$$

となる。よって

$t = -1$ のとき、接線の方程式は $y = -24x - 4$ 、接点の座標は $(-1, 20)$

$t = 2$ のとき、接線の方程式は $y = 3x - 4$ 、接点の座標は $(2, 2)$

である。

(答) 接線の方程式: $y = -24x - 4$, 接点の座標: $(-1, 20)$
 接線の方程式: $y = 3x - 4$, 接点の座標: $(2, 2)$

問 2

接線 l_t が点 $(0, k)$ を通るとき、

$$k = 2t^3 - 6t^2 + 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。①を t に関する方程式と見ると、点 $(0, k)$ を通る l_t が 3 本引けるとき、①は 3 つの異なる実数解をもつ。さらにこれは、

$$f(t) = 2t^3 - 6t^2 + 4$$

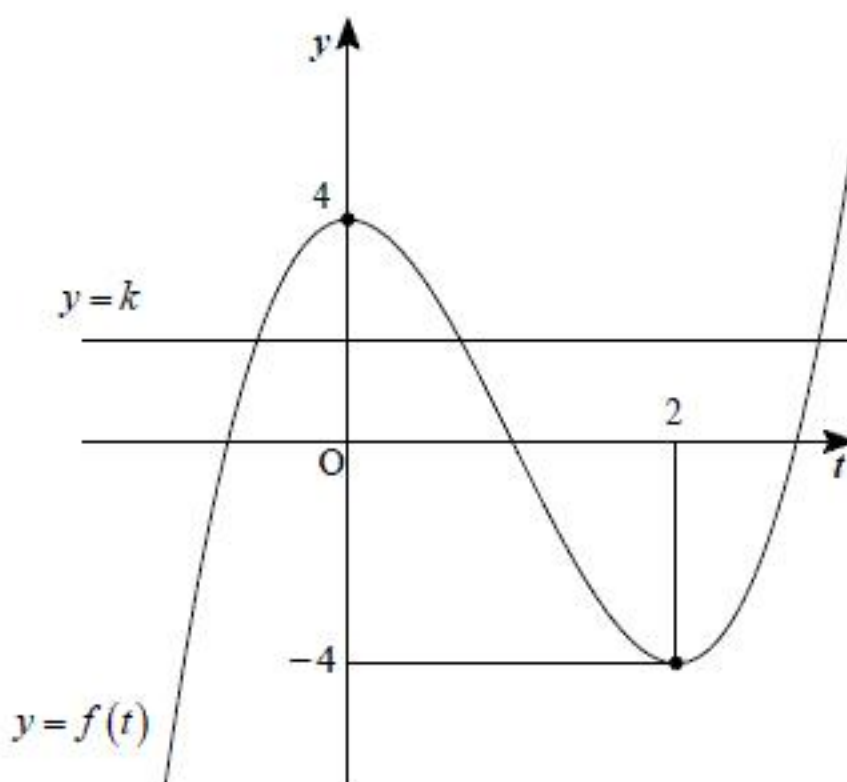
とおくと、 ty 平面上の関数 $y = f(t)$, $y = k$ のグラフが異なる 3 個の交点をもつ。ここで、

$$\begin{aligned} f'(t) &= 6t^2 - 12t \\ &= 6t(t - 2) \end{aligned}$$

より、 $f(t)$ に関する増減表は以下のようになる。

t	...	0	...	2	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	↗	4	↘	-4	↗

よって、関数 $y = f(t)$ のグラフの概形は次のようになる。



よって、関数 $y = f(t)$, $y = k$ のグラフが異なる 3 個の交点をもつような k の値の範囲は、 $-4 < k < 4$ となる。

(答) $-4 < k < 4$

関数 $y = \frac{1}{x}$ 上の点 P を $p > 0$ として $P\left(p, \frac{1}{p}\right)$ とおく。直線 AB は、

$$y = -\frac{1}{4}x - 1$$

と表されるから、点 P と直線 AB の距離は

$$\frac{\left|p + \frac{4}{p} + 4\right|}{\sqrt{17}}$$

となり、

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{4^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

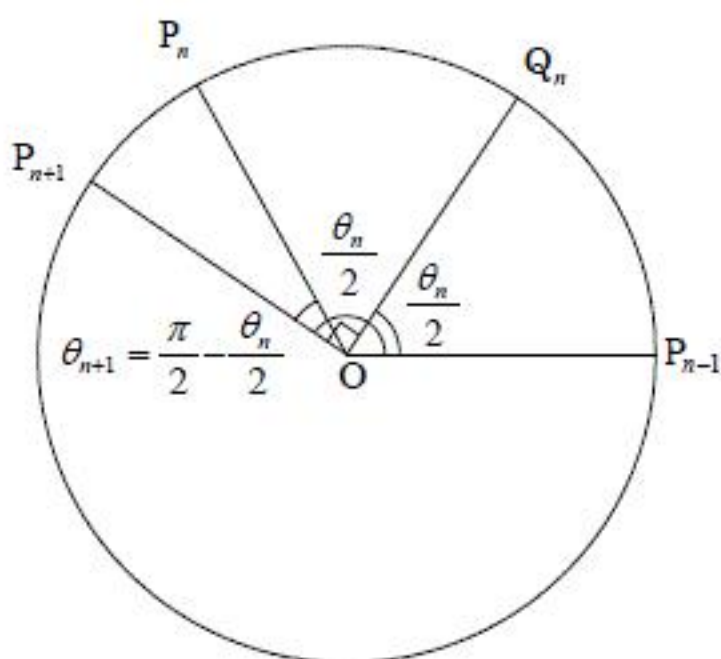
であることより

$$\begin{aligned} \triangle ABP &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} \cdot \frac{p + \frac{4}{p} + 4}{\sqrt{17}} \\ &= \frac{1}{2} \left(p + \frac{4}{p} + 4 \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(2\sqrt{p \cdot \frac{4}{p}} + 4 \right) \quad (\because \text{相加平均} \cdot \text{相乗平均の大小関係}) \\ &= 4 \end{aligned}$$

となる。等号が成立するのは $p = \frac{4}{p}$ 、つまり $p = 2$ のときであり、このとき $\triangle ABP$ の最小値

は 4、点 P の座標は $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ となる。

(答) $\triangle ABP$ の最小値 : 4, P の座標 : $\left(2, \frac{1}{2}\right)$



線分 OQ_n が $\angle P_{n-1}OP_n (= \theta_n)$ の二等分線であることから、 $\angle Q_nOP_n = \frac{\theta_n}{2}$ となる。また、

$\angle Q_nOP_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ であることから

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \angle P_nOP_{n+1} \\ &= \angle Q_nOP_{n+1} - \angle Q_nOP_n \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_n}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \theta_{n+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_n}{2} \quad (n \geq 1)$$

問 2

$$\theta_{n+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_n}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta_{n+1} - \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \left(\theta_n - \frac{\pi}{3} \right)$$

より、

$$\theta_n - \frac{\pi}{3} = \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \left(\theta_1 - \frac{\pi}{3} \right)$$

であり、 $\theta_1 = \angle P_0OP_1 = \frac{\pi}{2}$ であることから、

$$\theta_n = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \theta_n = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

問 3

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \theta_k &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \left(-\frac{1}{2} \right)^{k-1} \right\} \\ &= \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n}{1 + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\pi}{9} \left\{ 3n + 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^n \theta_k = \frac{\pi}{9} \left\{ 3n + 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right\}$$

問 1

$\sin \alpha = 2 \cos \alpha$ であるとき,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

となる。 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos \alpha \geq 0$ であることから

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

となり, $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$ より

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

問 2

$\sin x = 2 \cos x$ を満たす x の値を α とおく。 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において, $\sin x$ は単調増加関数, $\cos x$

は単調減少関数であるから, $\sin x - 2 \cos x$ は単調増加関数である。よって,

$$0 \leq x \leq \alpha \text{ のとき, } \sin x - 2 \cos x \leq 0$$

$$\alpha < x \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } \sin x - 2 \cos x > 0$$

である。これより

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - 2 \cos x| dx &= \int_0^{\alpha} (2 \cos x - \sin x) dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - 2 \cos x) dx \\ &= [2 \sin x + \cos x]_0^{\alpha} + [-\cos x - 2 \sin x]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4 \sin \alpha + 2 \cos \alpha - 3 \\ &= 2\sqrt{5} - 3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - 2 \cos x| dx = 2\sqrt{5} - 3$$

問 1

題意を満たす四角すいが存在する条件より、 $-1 < t < 1$ である。図形の対称性より、正方形 ABCD の重心を H とおくと、点 H の座標は $(0, 0, t)$ となる。P, O, H の 3 点は一直線上に存在し、 $PH \perp AH$ となる。よって、 $\triangle OAH$ は直角三角形であり、 $OH = |t|$, $OA = 1$ であることより、 $AH = \sqrt{1-t^2}$ となる。また、 $PH = 1-t$ であることから、求める四角すいの体積 V は、底面の正

方形の対角線の長さが $2\sqrt{1-t^2}$ 、高さが $1-t$ の四角すいの体積であるから、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot (1-t) \cdot \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{1-t^2})^2 \\ &= \frac{2}{3} (1-t)^2 (1+t) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3} (1-t)^2 (1+t)$$

問 2

$-1 < t < 1$ のもとで $V = \frac{2}{3} (1-t)^2 (1+t)$ より、

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{2}{3} \cdot 2 \cdot (1-t)(1+t) + \frac{2}{3} (1-t)^2 \\ &= \frac{2}{3} (t-1)(3t+1) \end{aligned}$$

となる。これより、増減表は以下のようになる。

t	-1	...	$-\frac{1}{3}$	...	1
$\frac{dV}{dt}$		+	0	-	
V			$\frac{64}{81}$		

よって、 $t = -\frac{1}{3}$ のとき、 V は最大値 $\frac{64}{81}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad t = -\frac{1}{3} \text{ のとき最大値 } \frac{64}{81}$$

$P(x, y)$ とすると、直線 $x = -1$ からの距離の2乗は $|x+1|^2$ 、点 $A(1, 0)$ からの距離の2乗は

$(x-1)^2 + y^2$ であることから、これらの和が6になる点 P の軌跡 C の方程式は

$$\begin{aligned} |x+1|^2 + (x-1)^2 + y^2 &= 6 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

となる。これは楕円を表す式である。

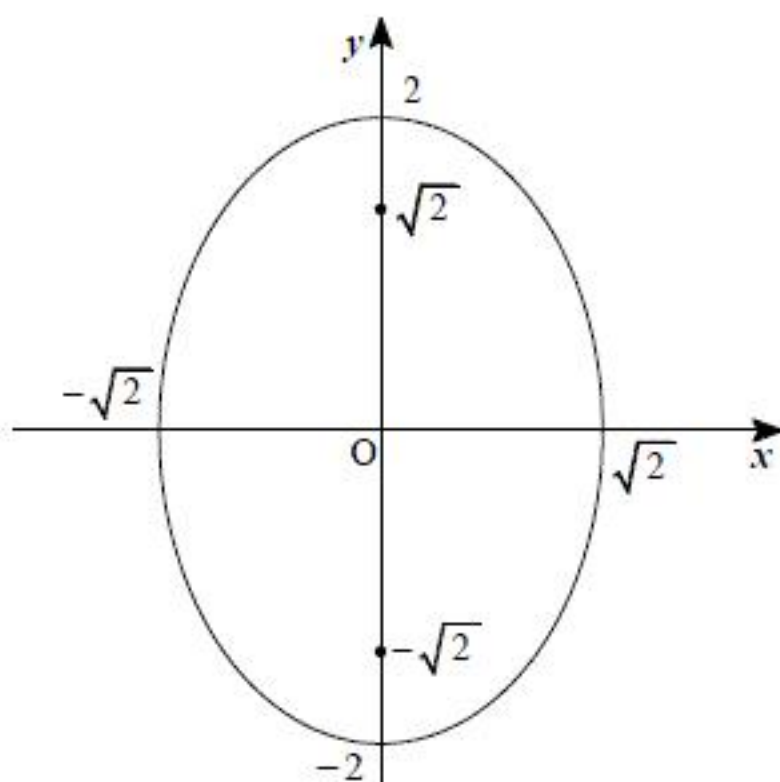
(証明終)

$C: \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ について、 $2 > \sqrt{2} (> 0)$ であることより、 C の焦点の座標は

$(0, \pm\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2})$ 、つまり、 $(0, \pm\sqrt{2})$ となる。 C は中心が $O(0, 0)$ 、長軸の長さが4、短軸

の長さが $2\sqrt{2}$ 、焦点の座標が $(0, \pm\sqrt{2})$ である楕円であるため、その概形と焦点の位置は下

図のようになる。



(答) 焦点 $(0, \pm\sqrt{2})$ 、上図

問 1

真である。

[証明]

命題「 x が有理数, y が無理数ならば, $x+y$ は無理数である」を背理法を用いて示す。 $x+y$ が有理数であると仮定すると,

$$x+y = \frac{q}{p} \quad (p, q \text{ は互いに素な整数, } p \neq 0)$$

とかける。また, x が有理数であることから,

$$x = \frac{s}{r} \quad (r, s \text{ は互いに素な整数, } r \neq 0)$$

とかける。よって,

$$\begin{aligned} y &= (x+y) - x \\ &= \frac{q}{p} - \frac{s}{r} \\ &= \frac{qr - ps}{pr} \end{aligned}$$

となるが, これは y が有理数であることを示す。よって, y が無理数であることに矛盾するため, 仮定は誤りである。これより, 命題は示された。

(証明終)

問 2

偽である。

[反例]

$x = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ とすると, $x+y=0$ となる。このとき, x, y は無理数であるが, $x+y$ は有理数である。