

問1 例えば, $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ より, 底が $\frac{1}{2} < 1$ のとき

$$1 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$$

が成り立つので, $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ は題意を満たす。

次に, $2 < 3 < 4$ より, 底が $2 > 1$ のとき

$$1 = \log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 = 2$$

が成り立つので, $(x, y) = (2, 3)$ は題意を満たす。

以上から求める (x, y) の組の例は, $(2, 3), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$

$$(\text{答}) \quad (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), (2, 3)$$

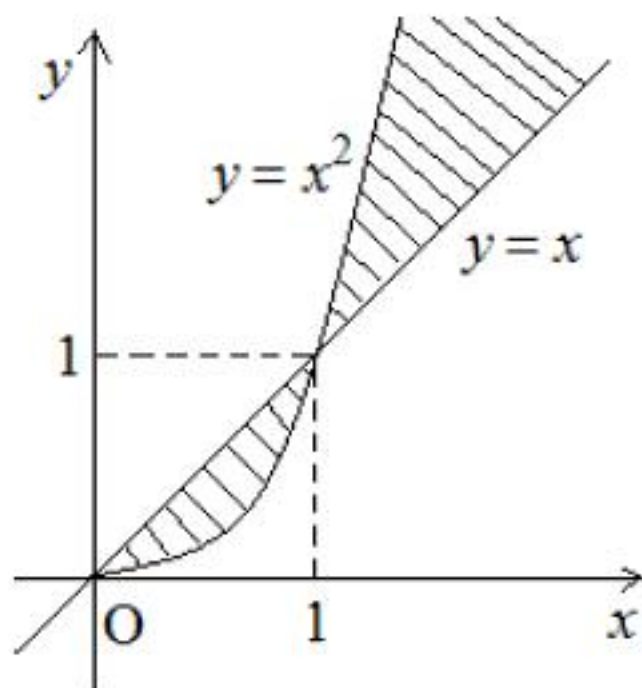
問2 $1 = \log_x x < \log_x y < \log_x x^2 = 2$ の解は

$$1 < x \text{ のとき } x < y < x^2$$

$$x = 1 \text{ のとき } \text{解なし}$$

$$0 < x < 1 \text{ のとき } x^2 < y < x$$

なので, 解を図示すると次図斜線部のようなになる。(境界は含まない)



(答)

問1

$$\begin{aligned}
 d &= \sqrt{\{\cos(5t-t^2) - \cos t\}^2 + \{-\sin(5t-t^2) - \sin t\}^2} \\
 &= \sqrt{\cos^2(5t-t^2) + \sin^2(5t-t^2) + \cos^2 t + \sin^2 t - 2\cos t \cos(5t-t^2) + 2\sin t \sin(5t-t^2)} \\
 &= \sqrt{2\{1 - \cos t \cos(5t-t^2) + \sin t \sin(5t-t^2)\}} \\
 &= \sqrt{2\{1 - \cos(6t-t^2)\}}
 \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad d = \sqrt{2\{1 - \cos(6t-t^2)\}}$$

問2 P, Qが同一の点となるのは $d=0$ となるときなので, その条件は

$$\cos(6t-t^2) = 1$$

$$6t-t^2 = 2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

$$t^2 - 6t + 2n\pi = 0$$

$$t = 3 \pm \sqrt{9 - 2n\pi} \quad (n \leq 1)$$

これを満たす t のうち, 最小となる $t=t_0(>0)$ は,

$$t_0 = 3 - \sqrt{9 - 2\pi}$$

$$(\text{答}) \quad t_0 = 3 - \sqrt{9 - 2\pi}$$

問3 $0 \leq t \leq t_0$ のとき, $(6t-t^2)$ の値域は $0 \leq (6t-t^2) \leq 2\pi$ であり, $\cos(6t-t^2)$ の値域は $-1 \leq \cos(6t-t^2) \leq 1$ である。よって, d は $\cos(6t-t^2) = -1$ のとき, 最大値2をとる。このときの t の値は

$$6t-t^2 = \pi \Leftrightarrow t = 3 - \sqrt{9 - \pi} \quad (\because 0 \leq t \leq t_0)$$

$$(\text{答}) \quad \text{最大値 } 2, \quad t = 3 - \sqrt{9 - \pi}$$

問1 Hは△ABCの垂心なので、 $\overline{CH} \perp \overline{AB}$, $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ である。

$$\overline{CH} \cdot \overline{AB} = \left\{ s \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \end{pmatrix} = -68s + 17t = 0$$

$$\Leftrightarrow 4s - t = 0$$

$$\overline{AH} \cdot \overline{BC} = \left\{ s \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = -17s - 34t + 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow s + 2t - 1 = 0$$

以上から求める連立1次方程式は、

$$4s - t = 0, s + 2t - 1 = 0$$

$$(\text{答}) \quad 4s - t = 0, s + 2t - 1 = 0$$

問2 問1で求めた連立方程式を解くと、

$$s = \frac{1}{9}, t = \frac{4}{9}$$

よって、

$$\overline{OH} = \overline{OC} + \overline{CH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{4}{9} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

求めるHの座標は $\left(4, \frac{1}{3} \right)$

$$(\text{答}) \quad \left(4, \frac{1}{3} \right)$$

問1 $g(x) = \sqrt{x}(1 + \log x)^2$ とおく。

まず、 $x > 0$ において $g(x) \geq 0$ である。(等号成立は $1 + \log x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$ のとき)

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \log x)^2 + \sqrt{x} \cdot 2(1 + \log x) \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \log x)(5 + \log x) \end{aligned}$$

よって、 $0 < x < \frac{1}{e}$ における $g(x)$ の増減表は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e^5}$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{e}\right)$
$g'(x)$		+	0	-	(0)
$g(x)$		$\nearrow$	$\frac{16}{\sqrt{e^5}}$	$\searrow$	(0)

増減表より、 $0 < x < \frac{1}{e}$ のとき $0 < \sqrt{x}(1 + \log x)^2 \leq \frac{16}{\sqrt{e^5}}$

であることが示された。(証明終)

問2 $x(>0)$ が十分小さいときを考えると、問1より

$$0 = \sqrt{x} \cdot 0 < \sqrt{x} g(x) \leq \sqrt{x} \cdot \frac{16}{\sqrt{e^5}}$$

が成り立つ。 $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \cdot \frac{16}{\sqrt{e^5}} = 0$ より、 $f(x) = \sqrt{x} g(x)$ に注意すると、

はさみうちの原理より $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$ が成り立つ。(証明終)

問3 $f'(x) = (1 + \log x)(3 + \log x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}, \frac{1}{e^3}$

$$f''(x) = \frac{2}{x}(2 + \log x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^2}$$

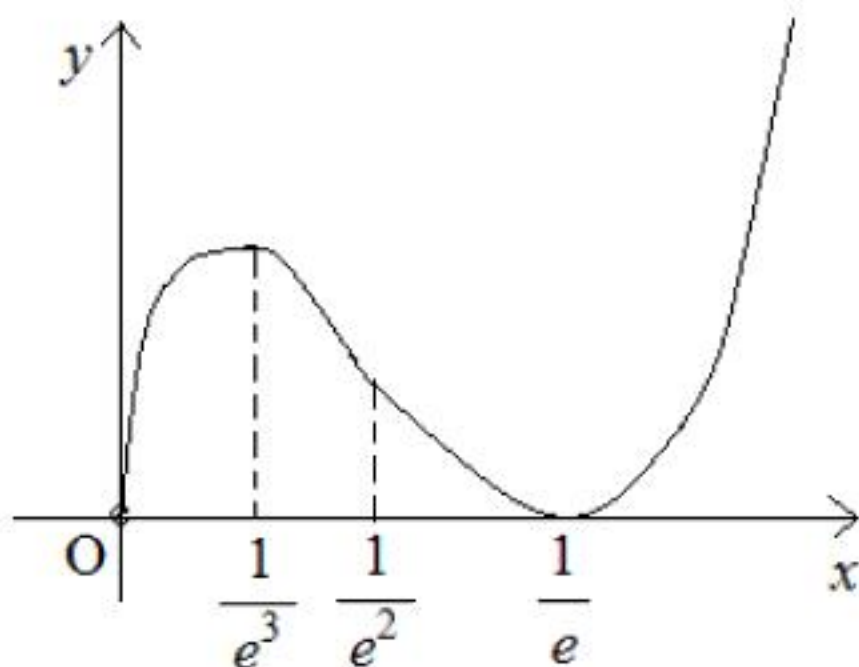
よって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e^3}$	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$		-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{4}{e^3}$	$\searrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

増減表より、極値および変曲点の座標は次の通り。

(答) $x = \frac{1}{e^3}$ で極大値 $\frac{4}{e^3}$ 、 $x = \frac{1}{e}$ で極小値 0、変曲点は $\left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e^2}\right)$

さらに、グラフの概形は次図のようになる。



(答)

条件(I)より、 $x^2+2x-1=0$ の解は $f(x)=0$ の解である。

$$x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x=-1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}$$

この2解と共に等差数列をなす、 $f(x)=0$ の3つ目の解として考えられるのは

$$x=-1+3\sqrt{2}, -1, -1-3\sqrt{2}$$

の3通りである。3つ目の解を $x=k$ としたとき、 $f(x)$ の式は次のようになる。

$$f(x)=(x^2+2x-1)(x-k)=x^3+(-k+2)x^2+(-2k-1)x+k$$

このとき、 $(a,b,c)=(-k+2,-2k-1,k)$ である。

よって、求める (a,b,c) の組は次の3通り。

(答)

$$(a,b,c)=\left(3-3\sqrt{2}, 1-6\sqrt{2}, -1+3\sqrt{2}\right), (3,1,-1), \left(3+3\sqrt{2}, 1+6\sqrt{2}, -1-3\sqrt{2}\right)$$

問1 $\angle POA + \angle OPA = \angle PAB$ なので, $\theta + \angle OPA = 3\angle OPA \quad \therefore \theta = 2\angle OPA$

正弦定理より

$$\frac{OA}{\sin \angle OPA} = \frac{OP}{\sin \angle PAO} \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{r}{\sin \left(\pi - \frac{3}{2}\theta \right)}$$

が成り立つので,

$$r = \frac{\sin \frac{3}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} = 3 - 4\sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (3 \text{ 倍角の公式を用いた})$$

$$= 3 - 4 \cdot \frac{1 - \cos \theta}{2} = 1 + 2\cos \theta \quad (\text{半角の公式を用いた})$$

$$\text{よって, } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき } r = 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$$

$$(\text{答}) \quad r = 1 + \sqrt{3}$$

問2 問1 より $r = 1 + 2\cos \theta$

$$(\text{答}) \quad r = 1 + 2\cos \theta$$

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin \left\{ \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right\}} \\
 &= \pi \int_0^1 \frac{1}{\sin \left\{ \frac{\pi}{4} (1+x) \right\}} dx
 \end{aligned}$$

ここで、 $t = \frac{\pi}{4}(1+x)$ とおくと

$$\begin{aligned}
 &= \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} \cdot \frac{4}{\pi} dt \\
 &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{1 - \cos t} + \frac{\sin t}{1 + \cos t} \right) dt \\
 &= 2 \left[\log \frac{(1 - \cos t)}{(1 + \cos t)} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 4 \log(\sqrt{2} + 1)
 \end{aligned}$$

(答) $4 \log(\sqrt{2} + 1)$