

1

問 1

点 P の座標を (a, b) とおく。このとき、

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = \{(a+s)^2 + b^2\} + \{(a-s)^2 + b^2\} + \{a^2 + (b - \sqrt{3}s)^2\} = t$$

となる。これを整理すると、

$$3a^2 + 5s^2 + 3b^2 - 2\sqrt{3}bs = t \quad \dots \textcircled{1}$$

これを満たす実数 a, b が存在するような s, t の条件を考える。①を b に関する 2 次方程式と考えると、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow 3b^2 - 2\sqrt{3}sb + 3a^2 + 5s^2 - t = 0$$

なので、これを満たす実数 b が存在するための条件は、この 2 次方程式の判別式を D として、

$$\frac{D}{4} = 3s^2 - 3(3a^2 + 5s^2 - t) = -12s^2 - 9a^2 + 3t \geq 0$$

である。よって、

$$-12s^2 - 9a^2 + 3t \geq 0 \Leftrightarrow 3a^2 - t + 4s^2 \leq 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たす実数 a が存在するための条件を考えればよい。②を a に関する 2 次不等式と考えると、この 2 次不等式が解を持つための条件は、

$$-t + 4s^2 \leq 0$$

である。よって、点 P が存在するための必要十分条件は、

$$-t + 4s^2 \leq 0$$

となる。このもとで、方程式①を変形すると、

$$a^2 + \left(b - \frac{\sqrt{3}}{3}s\right)^2 = \frac{1}{3}(t - 4s^2)$$

を得る。これより、求める軌跡は、

$$x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}s\right)^2 = \frac{1}{3}(t - 4s^2)$$

である。

(答) 必要十分条件 $-t + 4s^2 \leq 0$

軌跡の方程式 $x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}s\right)^2 = \frac{1}{3}(t - 4s^2)$

問 2

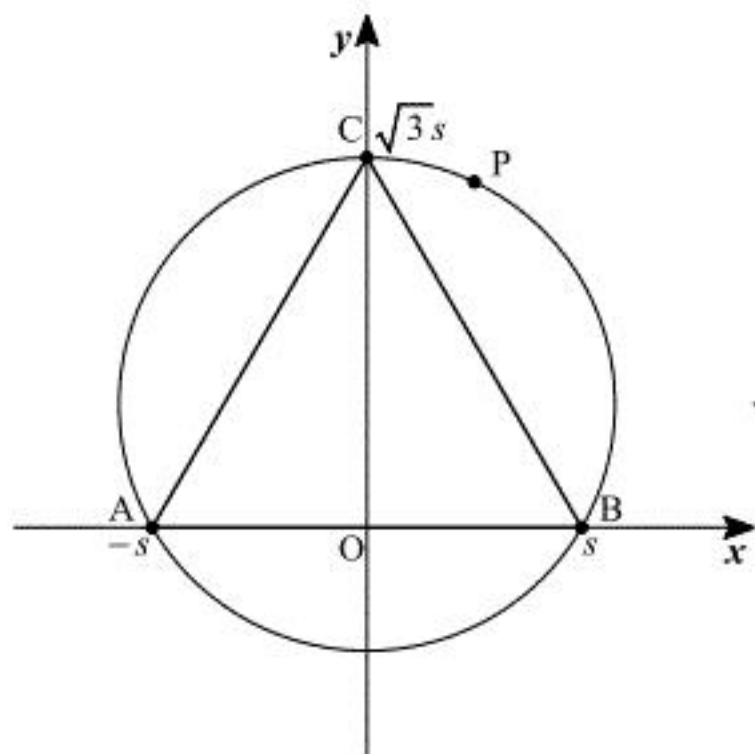
$x = -s, y = 0$ を点 P の軌跡の方程式に代入して整理すると、

$$t = 8s^2$$

となり、このとき点 P の軌跡は、

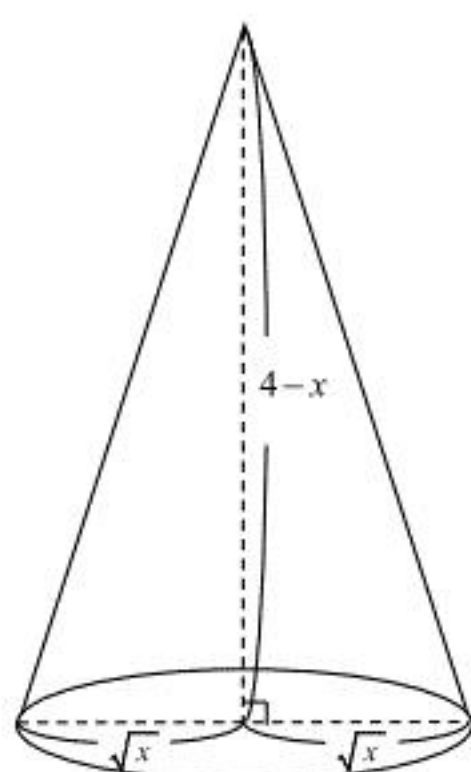
$$x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}s\right)^2 = \frac{4}{3}s^2$$

となる。これを図示すると次図のようになる。



(答) 関係式 $t = 8s^2$

軌跡 前図



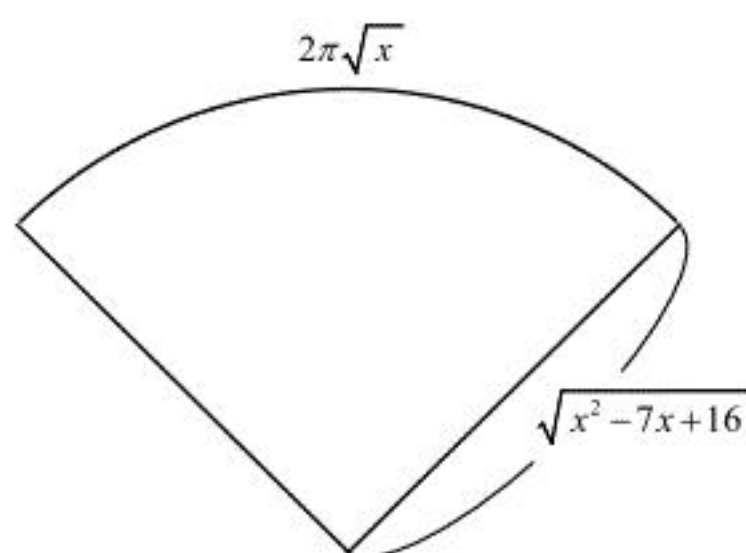
問 1

母線の長さは、三平方の定理より、

$$\sqrt{(\sqrt{x})^2 + (4-x)^2} = \sqrt{x^2 - 7x + 16}$$

である。また、底面の円の円周は $2\pi\sqrt{x}$ である。ここで、円錐の側面の展開図を考えると、こ

れは扇形であり、弧の長さは $2\pi\sqrt{x}$ 、半径は $\sqrt{x^2 - 7x + 16}$ となる。



よって、この三角錐の側面積 S は前図の扇形の面積で、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^2 - 7x + 16} \\ &= \pi\sqrt{x(x^2 - 7x + 16)} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad S = \pi\sqrt{x(x^2 - 7x + 16)}$$

問 2

$$f(x) = \left(\frac{S}{\pi} \right)^2 = x(x^2 - 7x + 16) = x^3 - 7x^2 + 16x$$

であるから、

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 16 = (3x - 8)(x - 2)$$

となり、 $1 \leq x \leq \frac{7}{2}$ の範囲では増減表は次のようになる。

x	1	...	2	...	$\frac{8}{3}$	...	$\frac{7}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	10	↗	12	↘	$\frac{320}{27}$	↗	$\frac{105}{8}$

これより、

$$\text{最大値 } \frac{105}{8} \quad \left(x = \frac{7}{2} \right)$$

$$\text{最小値 } 10 \quad (x = 1)$$

である。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値 } \frac{105}{8} \quad \left(x = \frac{7}{2} \right)$$

$$\text{最小値 } 10 \quad (x = 1)$$

3

問 1

$\triangle ABC$ は正三角形であり、 $AB=2$ と、点 C が xy 平面の $x>0$ の部分にあることから、点 C の座標は、

$$C(\sqrt{3}, 0, 0)$$

となる。次に、 $\triangle ABC$ の重心の座標は、

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right)$$

である。四面体 $ABCD$ は正四面体であり、 $\triangle ABC$ は xy 平面内にあるので、点 D は、 $\triangle ABC$ の重心を通り z 軸に平行な直線上に存在するので、

$$D\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, z\right) \quad (z>0)$$

とおくことができる。 $AD=AB=2$ であるから、

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (-1)^2 + z^2 = 4$$

となるが、 $z>0$ なので、

$$z = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

を得る。以上から、点 D の座標は

$$D\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$$

となる。

$$(答) \ C(\sqrt{3}, 0, 0), \ D\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$$

問 2

$E\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right)$ であるので、

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OE} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

となり、点 G の座標は、

$$G\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

である。

$$(答) \ G\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

問 3

$$\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$\overrightarrow{GD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OG} = \left(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

なので、

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GD}}{|\overrightarrow{GA}| |\overrightarrow{GD}|} = -\frac{1}{3}$$

となる。

$$(答) \ \cos\alpha = -\frac{1}{3}$$

問 4

問 3 の過程も用いて、

$$\triangle AGD = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{GA}|^2 |\overrightarrow{GD}|^2 - (\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GD})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。

$$(答) \ \frac{\sqrt{2}}{2}$$

問 1

曲線 C ，直線 ℓ の式から y を消去すると，

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+2) = 0$$

・・・①

となる。

$$x^2+x+2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

より， $x^2+x+2=0$ を満たす実数 x は存在しないので，①を解くと，

$$x=1$$

となる。これが交点の x 座標であり，このとき交点の y 座標は，

$$y = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

である。したがって，曲線 C と直線 ℓ の交点の座標は，

$$\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

となる。

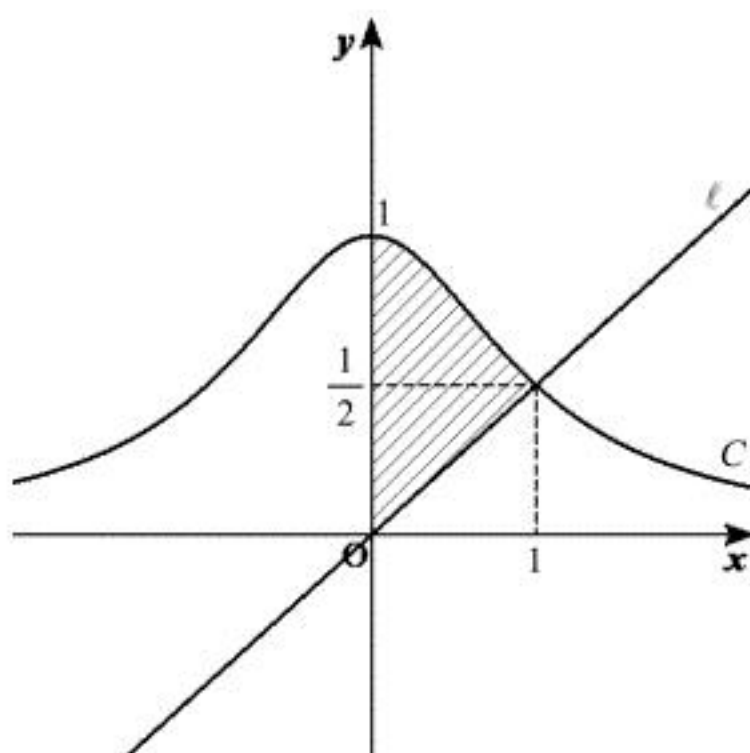
(答) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

問 2

曲線 $C: y = \frac{1}{1+x^2}$ について， $\frac{1}{1+(-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$ より，曲線 C は y 軸対称であり，また，

$$y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

より， $x > 0$ では常に $y' < 0$ である。よって，曲線 C と直線 ℓ のグラフの概形は次図のようになる。ただし，斜線部は y 軸のまわりに回転させる部分である。



したがって

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}x \right) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2} \log(1+x^2) - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^1 \\ &= \pi \left(\log 2 - \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

となる。

(答) $V = \pi \left(\log 2 - \frac{1}{3} \right)$

問 3

求める体積 W は，

$$\begin{aligned} W &= \pi \int_0^1 \left\{ \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2}x \right)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_0^1 \left\{ \frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{4}x^2 \right\} dx \end{aligned}$$

ここで， $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ において， $x = \tan \theta$ とおくと，

$$dx = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}, \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & \rightarrow & 1 \\ \hline \theta & 0 & \rightarrow & \frac{\pi}{4} \end{array}$$

となり，

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi+2}{8} \end{aligned}$$

となる。また，

$$\int_0^1 \frac{1}{4} x^2 dx = \left[\frac{1}{12} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

である。以上から，

$$W = \pi \left(\frac{\pi+2}{8} - \frac{1}{12} \right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{6}$$

となる。

(答) $W = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{6}$

問 1

曲線 $C: y = 1 - x^2$ において、

$$y' = -2x$$

なので、点 $(t, 1 - t^2)$ における曲線 C の接線の方程式は、

$$y = -2t(x - t) + 1 - t^2 = -2tx + t^2 + 1$$

と表される。これが点 $P\left(p, \frac{5-p}{4}\right)$ を通るとき、

$$\begin{aligned} \frac{5-p}{4} &= -2tp + t^2 + 1 \\ \Leftrightarrow 4t^2 - 8pt + p - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{2p \pm \sqrt{4p^2 - p + 1}}{2} \end{aligned}$$

となる。この 2 解が α, β ($\alpha < \beta$) なので、

$$\alpha = \frac{2p - \sqrt{4p^2 - p + 1}}{2}, \beta = \frac{2p + \sqrt{4p^2 - p + 1}}{2}$$

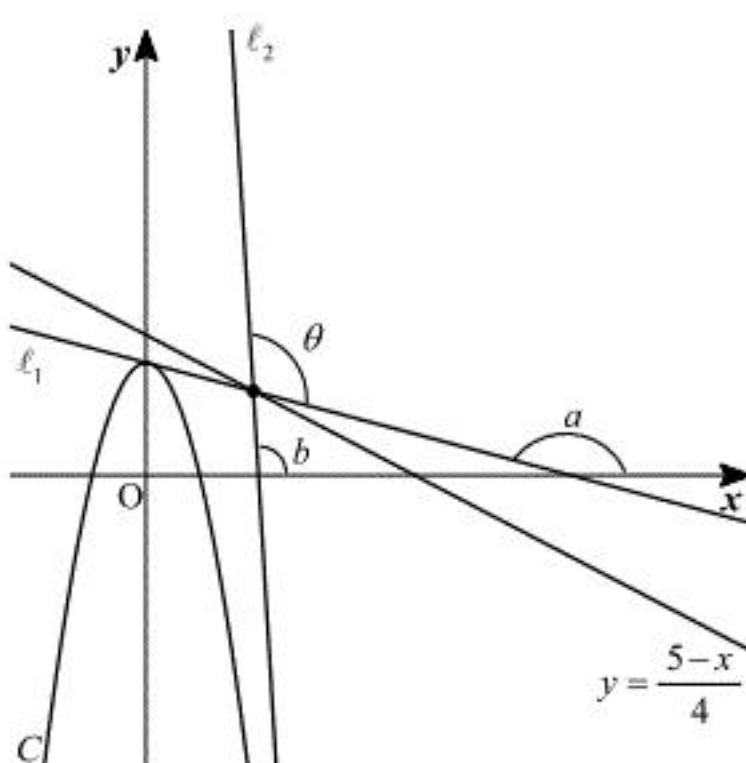
であり、このとき

$$\beta - \alpha = \frac{2p + \sqrt{4p^2 - p + 1}}{2} - \frac{2p - \sqrt{4p^2 - p + 1}}{2} = \sqrt{4p^2 - p + 1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \beta - \alpha = \sqrt{4p^2 - p + 1}$$

問 2



接線 ℓ_1, ℓ_2 が x 軸となす角をそれぞれ a, b とすると、 $\alpha, \beta \neq p$ より $a, b \neq \frac{\pi}{2}$ である。接線

ℓ_1, ℓ_2 の傾きはそれぞれ、 $-2\alpha, -2\beta$ なので、

$$\begin{aligned} \tan a &= -2\alpha \\ \tan b &= -2\beta \end{aligned}$$

となる。ここで、仮に ℓ_1, ℓ_2 が直交していると仮定すると、

$$\begin{aligned} \tan a \cdot \tan b &= -1 \\ \Leftrightarrow 4\alpha\beta &= -1 \end{aligned}$$

t に関する 2 次方程式 $4t^2 - 8pt + p - 1 = 0$ の 2 解が α, β だから、解と係数の関係より、

$$\alpha\beta = \frac{p-1}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

となるので、

$$\begin{aligned} 4 \cdot \frac{p-1}{4} &= -1 \\ \Leftrightarrow p &= 0 \end{aligned}$$

となり、これは $p > 1$ に反する。よって ℓ_1, ℓ_2 は直交しない。よって $\tan \theta$ が定義できて、

$$\begin{aligned} b + (\pi - \theta) &= a \\ \Leftrightarrow \theta &= \pi + b - a \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\pi + b - a) \\ &= \tan(b - a) \\ &= \frac{\tan b - \tan a}{1 + \tan b \tan a} \\ &= \frac{-2\beta + 2\alpha}{1 + 4\alpha\beta} \\ &= \frac{2(\beta - \alpha)}{1 + 4\alpha\beta} \end{aligned}$$

となる。よって、 $\textcircled{1}$ と問 1 の結果を用いて、

$$\tan \theta = \frac{2(\beta - \alpha)}{1 + 4\alpha\beta} = -\frac{2\sqrt{4p^2 - p + 1}}{p}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan \theta = -\frac{2\sqrt{4p^2 - p + 1}}{p}$$

問 3

$$\begin{aligned} \tan \theta &= -\frac{2\sqrt{4p^2 - p + 1}}{p} \\ &= -2\sqrt{4 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}} \quad (\because p > 1) \end{aligned}$$

であるから、 $\frac{1}{p} = t$ および $s = 4 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} = t^2 - t + 4$ とおくと、

$$s = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}$$

となり、 $p > 1$ より $0 < t < 1$ なので、

$$s \geq \frac{15}{4} \quad (\text{等号成立は } t = \frac{1}{2} \text{ のとき})$$

である。また、 $0 \leq \theta \leq \pi$ かつ $\tan \theta = -2\sqrt{s} < 0$ なので、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ であり、 s が最小のときに

$\tan \theta$ は最大となり、さらに θ も最大となる。つまり、

$$t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow p = 2$$

のときに θ は最大となる。

よって、このときの点 P の座標は $\left(2, \frac{3}{4}\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad \left(2, \frac{3}{4}\right)$$

問 1

$y = \log x$ について,

$$y' = \frac{1}{x}$$

より, 点 A(1, 0) における曲線 $y = \log x$ の接線の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{1}(x-1)+0 \\ &= x-1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $y = x-1$

問 2

問 1 と同様に, 点 B(2, log 2) における曲線 $y = \log x$ の接線の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(x-2)+\log 2 \\ &= \frac{1}{2}x+\log 2-1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $y = \frac{1}{2}x+\log 2-1$

問 3

曲線 $y = f(x)$ は, 2 点 A, B を通るので,

$$f(1) = a+b+c+d = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(2) = 8a+4b+2c+d = \log 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

また, さらに点 A, B における接線が ℓ_1, ℓ_2 に一致するので,

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

より,

$$f'(1) = 3a+2b+c = 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$f'(2) = 12a+4b+c = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。①, ②より,

$$7a+3b+c = \log 2 \quad \cdots \textcircled{5}$$

③, ④および, ③, ⑤より,

$$9a+2b = -\frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$4a+b = \log 2-1 \quad \cdots \textcircled{7}$$

⑥, ⑦より,

$$a = \frac{3}{2} - 2\log 2$$

$$b = 9\log 2 - 7$$

これらを⑤に代入して,

$$c = -12\log 2 + \frac{21}{2}$$

以上の a, b, c の値を①に代入して,

$$d = 5\log 2 - 5$$

を得る。

(答) $a = \frac{3}{2} - 2\log 2$

$$b = 9\log 2 - 7$$

$$c = -12\log 2 + \frac{21}{2}$$

$$d = 5\log 2 - 5$$

問 4

$1 \leq x \leq 2$ の範囲で考える。 $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d - \log x$ より,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c - \frac{1}{x} \\ &= \frac{3ax^3 + 2bx^2 + cx - 1}{x} \end{aligned}$$

であるが, ③, ④より,

$$\begin{aligned} g'(1) &= \frac{3a+2b+c-1}{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(2) &= \frac{24a+8b+2c-1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり, $g'(x) = 0$ が $x = 1, 2$ を解に持つから,

$$g'(x) = \frac{(x-1)(x-2)\left(3ax - \frac{1}{2}\right)}{x}$$

と変形できる。ここで, $a = \frac{3}{2} - 2\log 2$ より, $0.69 < \log 2 < 0.70$ を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} - 2 \cdot 0.70 < a < \frac{3}{2} - 2 \cdot 0.69 \\ \Leftrightarrow 0.1 < a < 0.12 \end{aligned}$$

である。よって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{6 \cdot 0.12} &< \frac{1}{6a} < \frac{1}{6 \cdot 0.1} \\ \therefore 1.3\cdots &< \frac{1}{6a} < 1.6\cdots \end{aligned}$$

であるから, 増減表は次のようになる。

x	1	...	$\frac{1}{6a}$	...	2
$g'(x)$	0	+	0	-	0
$g(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって, $y = g(x)$ ($1 \leq x \leq 2$) の最大値を与える x は,

$$x = \frac{1}{6a} = \frac{1}{9-12\log 2}$$

である。

(答) $x = \frac{1}{9-12\log 2}$

問 1

偽である。

(反例)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

のとき,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と, これらは逆行列を持つが,

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

について, この行列の行列式は

$$1 \times 1 - 1 \times 1 = 0$$

となり, $A+B$ は逆行列を持たない。

(答) 偽

問 2

偽である。

(反例)

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

のとき, この行列は逆行列

$$-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

を持つが,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ならば, B の行列式は

$$1 \times 0 - 1 \times 0 = 0$$

となり, B は逆行列を持たない。

(答) 偽

問 3

真である。

(証明)

行列 $A^{-1}B^{-1}A^{-1}$ を考える。このとき,

$$\begin{aligned} (ABA) \cdot (A^{-1}B^{-1}A^{-1}) &= E \\ (A^{-1}B^{-1}A^{-1}) \cdot (ABA) &= E \end{aligned}$$

が成り立つので, $A^{-1}B^{-1}A^{-1}$ は ABA の逆行列になっている。よって ABA の逆行列は存在する。したがって命題は真である。

(答) 真

問 4

真である。

(証明)

行列 X の行列式を $\det X$ と表すことにする。ここで, 2 行 2 列行列 X, Y について

$$\det(XY) = \det X \cdot \det Y \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つことを証明する。

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \det(XY) &= \det \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \\ &= (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) \\ &= adeh - adfg - bceh + bcfg \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det X \cdot \det Y &= (ad-bc) \cdot (eh-fg) \\ &= adeh - adfg - bceh + bcfg \end{aligned}$$

なので, ①が成り立つ。

いま, 行列 ABA が逆行列を持つので, ①を用いて

$$\begin{aligned} \det(ABA) &= \det A \cdot \det B \cdot \det A \\ &= (\det A)^2 \det B \neq 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって $\det A \neq 0$ かつ $\det B \neq 0$ であるから, このとき A, B も逆行列を持つ。よって, 命題は真である。

(答) 真