

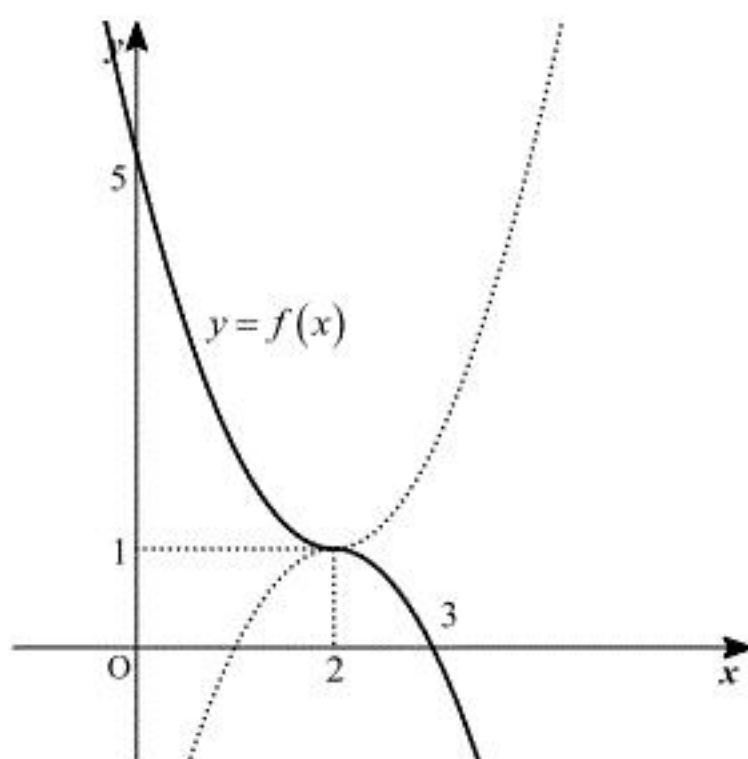
問 1

 $x < 2$ のとき,

$$f(x) = 1 - (x-2)(2-x) = (x-2)^2 + 1$$

であり, $x \geq 2$ のとき,

$$f(x) = 1 - (x-2)(x-2) = -(x-2)^2 + 1$$

であるから, $y = f(x)$ のグラフの概形は次図実線部である。

(答) 前図

問 2

(1)より $0 \leq t \leq 3$ では $f(t) \geq 0$ であることから, $S(t)$ は t について単調減少する。

またグラフより,

$$0 < \int_2^3 f(x) dx < 1$$

であるから, $S(t) = 2$ のとき $0 \leq t < 2$ となる。このとき,

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t^2 (x^2 - 4x + 5) dx + \int_2^3 (-x^2 + 4x - 3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x \right]_t^2 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_2^3 \\ &= \left(\frac{8}{3} - 8 + 10 \right) - \left(\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 5t \right) + (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{8}{3} + 8 - 6 \right) \\ &= -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 5t + \frac{16}{3} \end{aligned}$$

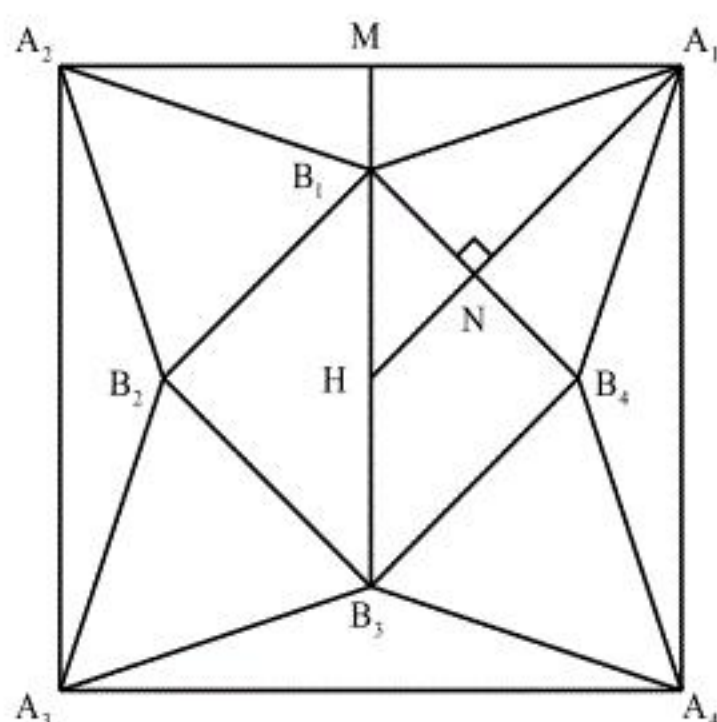
となる。 $S(t) = 2$ であるから,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 5t + \frac{16}{3} &= 2 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 5t + \frac{10}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow t^3 - 6t^2 + 15t - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-1)(t^2 - 5t + 10) &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-1) \left\{ \left(t - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{15}{4} \right\} &= 0 \\ \therefore t = 1 \left(\because \left(t - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \right) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $t = 1$

問 1



四角すいの表面積は、正方形から 4 つの二等辺三角形を取り除いた図形の面積に等しく、

$$S = 2^2 - 2 \cdot (1-t) \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 4t$$

である。

(答) $S = 4t$

問 2

上図のように A_1A_2 , B_1B_4 , B_1B_3 の中点をそれぞれ M , N , H とおく。条件より、

$$A_1B_1 = \sqrt{A_1M^2 + B_1M^2} = \sqrt{1 + (1-t)^2} = \sqrt{t^2 - 2t + 2}$$

$$B_1B_3 = 2 - 2 \cdot B_1M = 2 - 2(1-t) = 2t$$

$$B_1B_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot B_1B_3 = \sqrt{2}t$$

$$B_1N = \frac{1}{2} \cdot B_1B_4 = \frac{t}{\sqrt{2}}$$

$$A_1N = \sqrt{A_1B_1^2 - B_1N^2} = \sqrt{(t^2 - 2t + 2) - \left(\frac{t^2}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}t^2 - 2t + 2}$$

となる。この図形を組み立てたとき $A_1 \sim A_4$ が重なる点を O とすると、点 O から正方形 $B_1B_2B_3B_4$ におろした垂線の足は点 H に一致するので、正方形 $B_1B_2B_3B_4$ を底面と考えたとき四角錐の高さは OH に等しい。

$$OH = \sqrt{A_1N^2 - NH^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}t^2 - 2t + 2\right) - \left(\frac{t^2}{2}\right)} = \sqrt{2-2t}$$

と求まる。したがって、

$$V = (\sqrt{2}t)^2 \cdot \sqrt{2-2t} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} t^2 \sqrt{1-t}$$

となる。

(答) $V = \frac{2\sqrt{2}}{3} t^2 \sqrt{1-t}$

問 3

問 1, 問 2 より、

$$f(t) = \left(\frac{V}{S}\right)^2 = \frac{8t^4(1-t)}{9 \cdot 16t^2} = \frac{1}{18} t^2 (1-t) = \frac{1}{18} (-t^3 + t^2)$$

であるから、確かに $f(t)$ は 3 次関数である。さらに、

$$f'(t) = \frac{1}{18} (-3t^2 + 2t) = -\frac{1}{18} t(3t-2)$$

となるので、 $f(t)$ の増減表は次のとおりである。

t	0	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	(0)		$\frac{2}{243}$		(0)

したがって、 $f(t)$ は $t = \frac{2}{3}$ で最大値 $\frac{2}{243}$ をとる。

(答) 最大値： $\frac{2}{243} \left(t = \frac{2}{3}\right)$

問 1

条件より,

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$$

であるから, $n \geq 2$ のとき,

$$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) = 1 + (n-1)n - (n-1) = n^2 - 2n + 2$$

と求まる。上式は $n=1$ のときも成立する。

$$(\text{答}) \quad b_n = n^2 - 2n + 2$$

問 2

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (k^2 - 2k + 2) \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - n(n+1) + 2n \\ &= \frac{1}{6} n \{ (n+1)(2n+1) - 6(n+1) + 12 \} \\ &= \frac{1}{6} n (2n^2 - 3n + 7) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_n = \frac{1}{6} n (2n^2 - 3n + 7)$$

問 3

$$\begin{aligned} 2S_n - S_{n+1} &= 2S_n - (S_n + b_{n+1}) \\ &= S_n - b_{n+1} \\ &= \frac{1}{6} n (2n^2 - 3n + 7) - \{ (n+1)^2 - 2(n+1) + 2 \} \\ &= \frac{1}{6} n (2n^2 - 3n + 7) - (n^2 + 1) \\ &= \frac{1}{6} (2n^3 - 9n^2 + 7n - 6) \end{aligned}$$

となる。ここで, 自然数 n に対して関数 $f(n)$ を $f(n) = \frac{1}{6} (2n^3 - 9n^2 + 7n - 6)$ と定めると

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= \frac{1}{6} \{ 2(n+1)^3 - 9(n+1)^2 + 7(n+1) - 6 \} - \frac{1}{6} (2n^3 - 9n^2 + 7n - 6) \\ &= \frac{1}{6} [2 \{ (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - n^3 \} - 9 \{ (n^2 + 2n + 1) - n^2 \} + 7 \{ (n+1) - n \}] \\ &= \frac{1}{6} (6n^2 - 12n) \\ &= n(n-2) \end{aligned}$$

となるから, $n \geq 4$ のとき

$$n(n-2) > 0 \Leftrightarrow f(n+1) - f(n) > 0$$

$$\therefore f(n+1) > f(n) \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また,

$$f(4) = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

であるから, ①, ②より, 4以上の自然数 n に対して

$$f(n) > 0 \Leftrightarrow 2S_n - S_{n+1} > 0$$

$$\therefore S_{n+1} < 2S_n$$

が成立する。

(証明終)

問 1

点 (t, e^{2t}) を接点とする曲線 C の接線は,

$$y=2e^{2t}(x-t)+e^{2t}=2e^{2t}x+(1-2t)e^{2t}$$

である。上式が原点を通るとき,

$$t=\frac{1}{2}$$

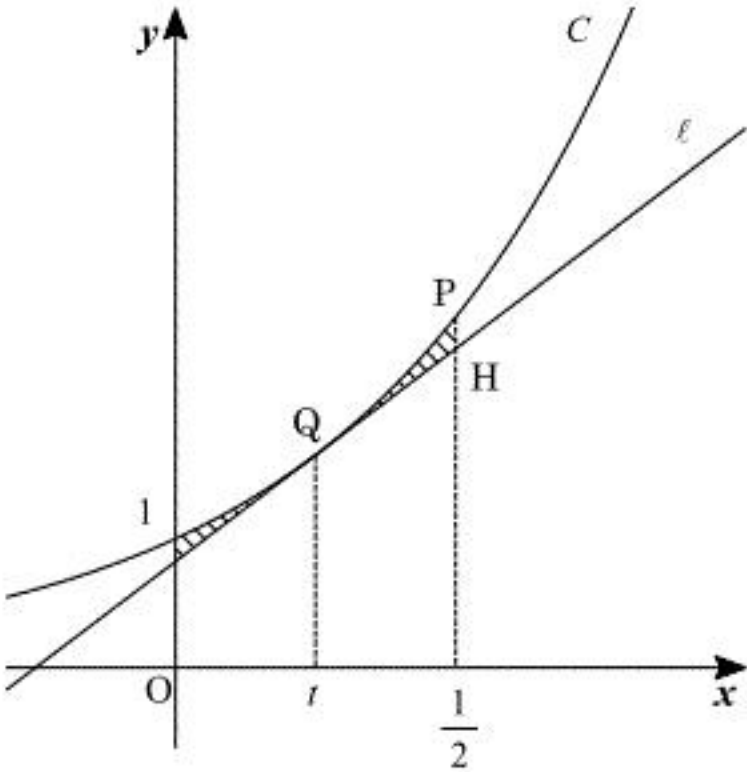
となるので、点 P の座標は,

$$P\left(\frac{1}{2}, e\right)$$

である。

(答) $P\left(\frac{1}{2}, e\right)$

問 2



$S(t)$ は上図の斜線部の面積であるから,

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ e^{2x} - (2e^{2t}x + e^{2t} - 2te^{2t}) \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2x} - e^{2t}x^2 + (2t-1)e^{2t}x \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}e - \frac{1}{4}e^{2t} + \left(t - \frac{1}{2} \right) e^{2t} - \frac{1}{2} \\ &= \left(t - \frac{3}{4} \right) e^{2t} + \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と求まる。よって,

$$\begin{aligned} S'(t) &= e^{2t} + \left(2t - \frac{3}{2} \right) e^{2t} \\ &= \frac{1}{2}(4t-1)e^{2t} \end{aligned}$$

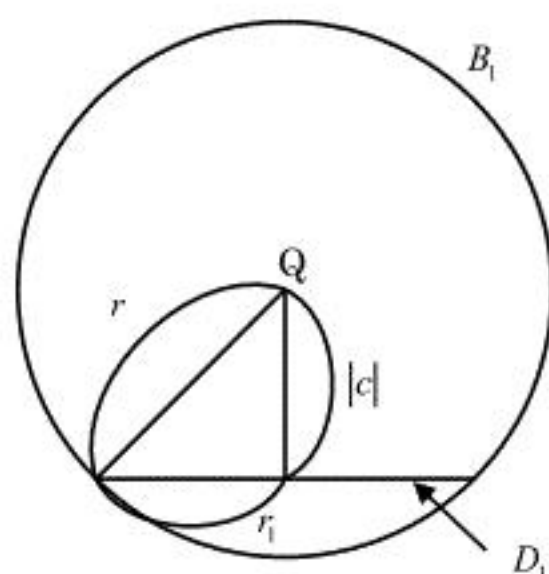
であるから、 $e^{2t} > 0$ より、 $S(t)$ の増減表は次のとおりである。

t	0	...	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{2}$
$S'(t)$		-	0	+	
$S(t)$		$\searrow$	$\frac{1}{2}(e-\sqrt{e}-1)$	$\nearrow$	

したがって、 $S(t)$ は $t=\frac{1}{4}$ で最小値 $\frac{1}{2}(e-\sqrt{e}-1)$ をとる。

(答) 最小値 $\frac{1}{2}(e-\sqrt{e}-1)\left(t=\frac{1}{4}\right)$

問 1



D_1 を含む平面と点 Q の距離が $|c|$ であり、 D_1 の円周上の点と点 Q の距離が r である。よって、 D_1 の半径を r_1 とすると、点 Q を含み xy 平面に垂直な平面における B の断面図は上図のとおりである。

したがって、 D_1 の中心座標は $(a, b, 0)$ 、半径は $r_1 = \sqrt{r^2 - c^2}$ である。同様に考える

と、 D_2 の中心座標は $(a, 0, c)$ 、半径は $\sqrt{r^2 - b^2}$ である。

(答) D_1 の中心座標: $(a, b, 0)$ 、半径: $\sqrt{r^2 - c^2}$ 、 D_2 の中心座標: $(a, 0, c)$ 、半径: $\sqrt{r^2 - b^2}$

問 2

D_1 と D_2 の交線は x 軸上にあり、点 Q との距離は $\sqrt{b^2 + c^2}$ であるから、交線の長さは、

$$2\sqrt{r^2 - (b^2 + c^2)} = 2\sqrt{r^2 - b^2 - c^2}$$

となる。これが4に等しいから、

$$r^2 - b^2 - c^2 = 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、問1より、

$$(r^2 - c^2)\pi = 8\pi \Leftrightarrow r^2 - c^2 = 8 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(r^2 - b^2)\pi = 12\pi \Leftrightarrow r^2 - b^2 = 12 \quad \dots \textcircled{3}$$

となるので、 $\textcircled{2} + \textcircled{3} - \textcircled{1}$ より、

$$r^2 = 12 + 8 - 4 = 16 \quad \therefore r = 4 \quad (\because r > 0)$$

と求まる。したがって、

$$b^2 = 4, c^2 = 8$$

となる。ゆえに、

$$(b, c, r) = (2, 2\sqrt{2}, 4), (2, -2\sqrt{2}, 4), (-2, 2\sqrt{2}, 4), (-2, -2\sqrt{2}, 4)$$

のいずれかである。

(答) $(b, c, r) = (2, 2\sqrt{2}, 4), (2, -2\sqrt{2}, 4), (-2, 2\sqrt{2}, 4), (-2, -2\sqrt{2}, 4)$

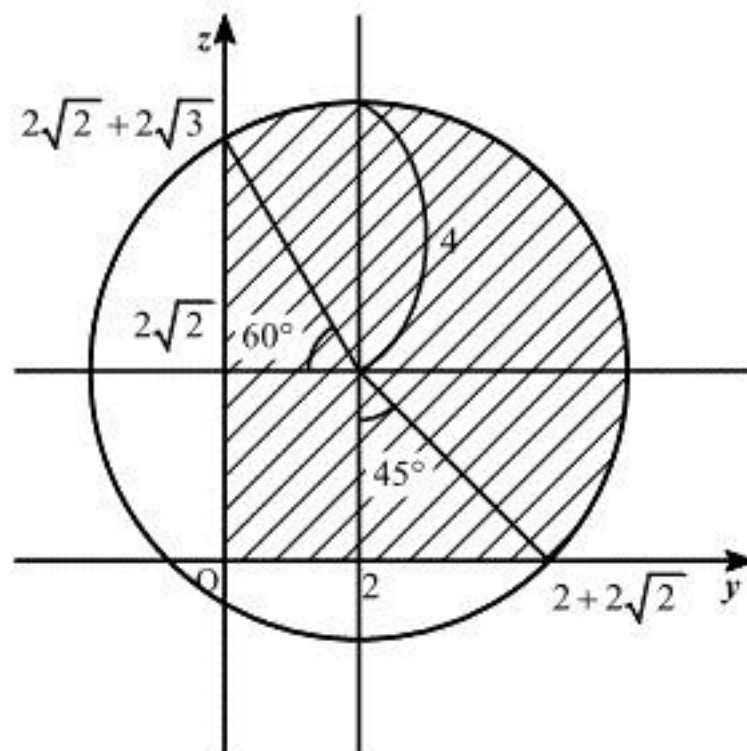
問 3

まず、 $(b, c, r) = (2, 2\sqrt{2}, 4)$ として考える。

中心 $(y, z) = (2, 2\sqrt{2})$ 、半径 $\sqrt{16 - a^2}$ の円の $y \geq 0, z \geq 0$ の部分が D_3 である。

明らかに、半径が最大になるときに D_3 の面積が最大になる。これは、 $a = 0$ のときである。

よって、次図の斜線部の面積を求めれば良い。



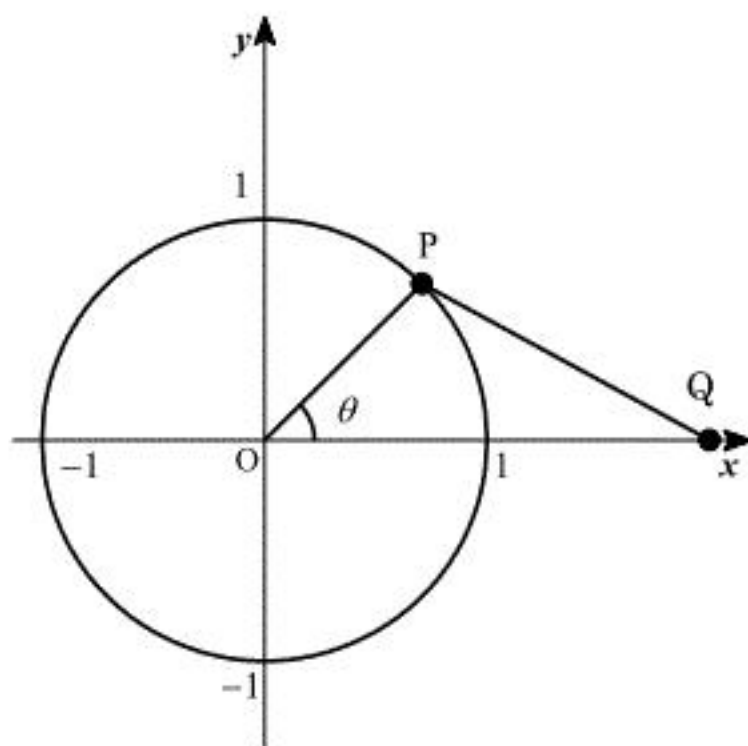
求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= 4 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} \right) \pi + 2 \cdot 2\sqrt{2} + 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{22}{3} \pi + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 4 \end{aligned}$$

と求まる。他の (b, c, r) の場合も、 $a = 0$ のときに最大になり、最大値はこれに等しい。

(答) 点 Q の座標: $(0, 2, 2\sqrt{2}), (0, 2, -2\sqrt{2}), (0, -2, 2\sqrt{2}), (0, -2, -2\sqrt{2})$

面積の最大値: $\frac{22}{3} \pi + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 4$



$Q(q, 0)$ ($q \geq 0$)とおくと, $PQ=2$ であるから, $\triangle OPQ$ に余弦定理を用いて,

$$\begin{aligned} 4 &= q^2 + 1 - 2q \cos \theta \\ \Leftrightarrow q^2 - 2q \cos \theta - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow q &= \cos \theta \pm \sqrt{3 + \cos^2 \theta} \end{aligned}$$

と求まる。ここで, $\cos \theta < \sqrt{3 + \cos^2 \theta}$ より, $q \geq 0$ を満たすのは,

$$q = \cos \theta + \sqrt{3 + \cos^2 \theta}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \cos \theta + \sqrt{3 + \cos^2 \theta}$$

問 2

点 $A(3, 0)$ であるから,

$$L = 3 - q = 3 - \cos \theta - \sqrt{3 + \cos^2 \theta}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} \frac{L}{\theta^2} &= \frac{1}{\theta^2} \cdot \frac{(3 - \cos \theta)^2 - (3 + \cos^2 \theta)}{3 - \cos \theta + \sqrt{3 + \cos^2 \theta}} \\ &= \frac{1}{\theta^2} \cdot \frac{6(1 - \cos \theta)}{3 - \cos \theta + \sqrt{3 + \cos^2 \theta}} \\ &= \frac{1}{\theta^2} \cdot \frac{12 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{3 - \cos \theta + \sqrt{3 + \cos^2 \theta}} \\ &= \frac{3}{3 - \cos \theta + \sqrt{3 + \cos^2 \theta}} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2} \\ &\rightarrow \frac{3}{4} \quad (\theta \rightarrow 0) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{4}$$

問 1

$$A^3B^2 - A^2B^3 = O$$

A は逆行列をもつから、上式の両辺に左から $(A^{-1})^2$ をかけて、

$$AB^2 - B^3 = O$$

となる。同様に、右から $(B^{-1})^2$ をかけて、

$$A - B = O$$

$$\therefore A = B$$

となる。したがって、題意が示された。

(証明終)

問 2

問 1 より、 $A \neq B$ のとき A, B のいずれかは逆行列を持たないので、 A は逆行列を持たず、 B は逆行列を持つとする。このとき、

$$A^3 - A^2B = O$$

$$\Leftrightarrow A^2(A - B) = O \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす。 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列を持たないとき、ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - (a+d)A = O \quad (\because ad - bc = 0)$$

$$\Leftrightarrow A^2 = (a+d)A$$

が成り立つ。ここで、 $A^2 \neq O$ より $a+d \neq 0$ である。

これを①に代入すると、

$$(a+d)A(A - B) = O$$

$$\Leftrightarrow A(A - B) = O \quad (\because a+d \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (a+d)A - AB = O$$

$$\Leftrightarrow A((a+d)E - B) = O$$

となる。これは、 $B = (a+d)E$ とすれば成り立ち、 B が逆行列を持つので条件を満たす。

以上より、(a), (b)を満たし $A \neq B$ である A, B の例は、 $a+d=1$ として、

$$\begin{cases} a+d=1 \\ ad-bc=0 \end{cases}$$

を満たすもの、例えば、

$$(a, b, c, d) = (1, 0, 0, 0)$$

がある。よって、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$