

平成23年度入学試験問題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 志望する受験区分に応じて、次の指示に従って解答しなさい。
(指定外の問題に解答した場合には採点されません。)
 - ・ 数学選修志願者、数学専攻志願者、情報選修志願者、情報専攻志願者、教育科学専攻志願者で「数学」の免許教科志望者は、
[3]、[4]、[5]、[6]、[7]に必答すること。
 - ・ 理科選修志願者、理科専攻志願者、自然科学コース志願者、教育科学専攻志願者で「理科」の免許教科志望者は、
[1]、[2]、[3]に必答すること。
 - ・ 技術専攻志願者、情報科学コース志願者、教育科学専攻志願者で「技術」の免許教科志望者は、
[1]、[2]に必答し、
[3]、[4]のうちから1題選択して解答すること。
3. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

解答上の注意

必答問題については、問題番号の印刷してある解答用紙に解答しなさい。

選択問題については、問題番号の印刷していない解答用紙に、選択した問題の番号を記入してから解答しなさい。

◎印は必答問題，○印は選択問題を示す。

1 (理科選修・理科専攻・自然科学コース◎，技術専攻・情報科学コース◎)

$f(x) = 1 - (x - 2)|x - 2|$ について以下の問いに答えよ。

問1 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。

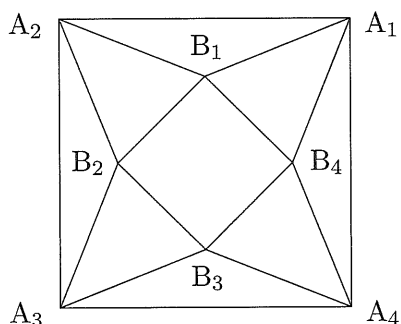
問2 $0 \leq t \leq 3$ における t の関数 $S(t)$ を，

$$S(t) = \int_t^3 f(x) dx$$

とおく。このとき $S(t) = 2$ となる t を求めよ。

2 (理科選修・理科専攻・自然科学コース◎，技術専攻・情報科学コース◎)

1 辺の長さが 2 の正方形の紙を用意し，頂点を A_1, A_2, A_3, A_4 と名づける。右図のように，正方形の各辺を底辺とする高さ $1 - t$ ($0 < t < 1$) の 4 つの二等辺三角形 $\triangle A_1 A_2 B_1, \triangle A_2 A_3 B_2, \triangle A_3 A_4 B_3, \triangle A_4 A_1 B_4$ を正方形から切り離す。そして，4 本の線分 $B_1 B_2, B_2 B_3, B_3 B_4, B_4 B_1$ で紙を折り，点 A_1, A_2, A_3, A_4 が 1 点になるように辺を貼り合わせて四角すいを作る。このとき，以下の問いに答えよ。



問1 この四角すいの表面積 S を t の式で表せ。

問2 この四角すいの体積 V を t の式で表せ。

問3 $\left(\frac{V}{S}\right)^2$ を $f(t)$ とおくとき， $f(t)$ が 3 次関数になることを示し， $f(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ。

3 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎, 理科選修・理科専攻・自然科学コース◎, 技術専攻・情報科学コース○)

数列 $\{a_n\}$ を初項 $a_1 = 1$, 公差が 2 の等差数列とし, 数列 $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = 1$ で $b_{n+1} - b_n = a_n$ を満たすとする。このとき, 以下の問いに答えよ。

問1 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

問2 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

問3 4 以上の自然数 n に対して $S_{n+1} < 2S_n$ が成立することを証明せよ。

4 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎, 技術専攻・情報科学コース○)

原点から曲線 $C: y = e^{2x}$ へひいた接線と C との接点を $P(a, b)$ とするとき, 以下の問いに答えよ。

問1 点 P の座標 (a, b) を求めよ。

問2 点 $(0, 1)$ から点 P まで曲線 C に沿って点 Q が動く。 C の点 Q における接線を ℓ , 点 P から x 軸に下ろした垂線と ℓ との交点を H とし, Q の x 座標を t とする。 $0 \leq x \leq a$ の範囲で曲線 C より下, かつ, 直線 ℓ より上の部分の面積を $S(t)$ とするとき, $0 < t < a$ における $S(t)$ の最小値と, そのときの t の値を求めよ。

5 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎)

座標空間内で点 $Q(a, b, c)$ を中心とする半径 r の球を B とし, B は各座標平面と交わる位置にあるとする。 B が xy 平面によって切り取られる立体のうち, Q を含む方を B_1 , 切断面を D_1 とする。また B が xz 平面によって切り取られる図形のうち, Q を含む方を B_2 , 切断面を D_2 とする。 D_1 の面積が 8π , D_2 の面積が 12π , D_1 と D_2 が交わってできる線分の長さが 4 のとき, 以下の問いに答えよ。

問1 D_1, D_2 のそれぞれの中心と半径を a, b, c, r を用いて表せ。

問2 b, c, r の値を求めよ。

問3 B_1 と B_2 の共通部分が yz 平面によって切り取られた切断面を D_3 とする。 a を動かしたときの D_3 の面積の最大値とそのときの点 Q の座標 $Q(a, b, c)$ を求めよ。

6 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎)

θ を $0 \leq \theta \leq \pi$ をみたす実数とする。単位円上の点 P を、動径 OP と x 軸の正の部分とのなす角が θ である点とし、点 Q を x 軸の正の部分の点で、点 P からの距離が 2 であるものとする。また、 $\theta = 0$ のときの点 Q の位置を A とする。

問1 線分 OQ の長さを θ を使って表せ。

問2 線分 QA の長さを L とするとき、極限值 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{L}{\theta^2}$ を求めよ。

7 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎)

2 次の正方行列 A, B について次の 2 つの条件を考える。(O は零行列を表す。)

(a) $A^3 B^2 - A^2 B^3 = O$

(b) $A^2 \neq O$ かつ $B^2 \neq O$

問1 (a) を満たす A と B がともに逆行列をもつとき、 $A = B$ であることを証明せよ。

問2 (a), (b) を満たし、 $A \neq B$ である A, B の例を 1 組あげよ。