

問 1

$x^2 + y^2 = 5^2$ の両辺を x で微分すると

$$2x + \frac{dy}{dx} \cdot 2y = 0$$

となる。よって、点 P の座標を代入して、

$$2s + \frac{dy}{dx} \cdot 2t = 0$$

となり、 $t \neq 0$ に注意して接線の傾きは $-\frac{s}{t}$ と求まる。したがって、接線の方程式は、

$s^2 + t^2 = 5^2$ に注意して、

$$y - t = -\frac{s}{t}(x - s)$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{s}{t}x + \frac{s^2}{t} + t$$

$$\therefore y = -\frac{s}{t}x + \frac{5^2}{t}$$

となる。

(証明終)

問 2

$$\begin{cases} s^2 + t^2 = 25 & \dots \textcircled{1} \\ -\frac{s}{t} = 7 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

において、②より、 $s = -7t$ が得られるから、これを①に代入して、

$$(-7t)^2 + t^2 = 50 \quad \therefore t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる。

よって、問 1 で示したことから、接線の方程式は

$$y = 7x \pm 25\sqrt{2}$$

となる。

(答) $y = 7x \pm 25\sqrt{2}$

問 1

$t = \cos x$ とおくと,

$$\begin{aligned} y &= \cos 2x - 2a \cos x + a^2 - 2a + 3 \\ \Leftrightarrow y &= 2 \cos^2 x - 2a \cos x + a^2 - 2a + 2 \\ \Leftrightarrow y &= 2 \left(t - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} (a-2)^2 \end{aligned}$$

とかける。 $-1 \leq t \leq 1$ であるから, 上の 2 次関数の軸 $t = \frac{a}{2}$ とこの区間の位置関係に注意して

場合分けをする。

[1] $a < -2$ のとき

$t = -1$ のとき最小となり, このとき, 最小値 $a^2 + 4$ となるが, 実数 a に対し,

$$a^2 + 4 > \frac{1}{2}$$

なので, 条件を満たす a は存在しない。

[2] $-2 \leq a \leq 2$ のとき

$\cos x = \frac{a}{2}$ のとき最小となり, 最小値 $\frac{1}{2}(a-2)^2$ となる。

$$\frac{1}{2}(a-2)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1, 3$$

となるが, $-2 \leq a \leq 2$ より, $a = 1$ を得る。

[3] $a > 2$ のとき

$\cos x = 1$ のとき最小となり, 最小値 $(a-2)^2$ となる。

$$(a-2)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となり, $a > 2$ より, $a = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

以上[1], [2], [3]より, $a = 1, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

$$(\text{答}) \ a = 1, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

問 2

$a = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, $\cos x = 1$ で最小となるので, $x = 0$ であり,

$a = 1$ のとき, $\cos x = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ で最小となるので, $x = \frac{\pi}{6}$ となる。

$$(\text{答}) \ a = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき } x = 0, \ a = 1 \text{ のとき } x = \frac{\pi}{6}$$

問 1

$P(\cos \theta, \sin \theta, 2)$, $A'(x, y, 0)$ とおく。 $A(1, 0, 1)$ であるから、 z 座標に注目すれば、 A は PA' の中点になっていることがわかる。したがって、

$$\frac{\cos \theta + x}{2} = 1, \frac{\sin \theta + y}{2} = 0 \quad \therefore x = -\cos \theta + 2, y = -\sin \theta$$

となり、軌跡は $(x-2)^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ となる。

$$(\text{答}) (x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$$

問 2

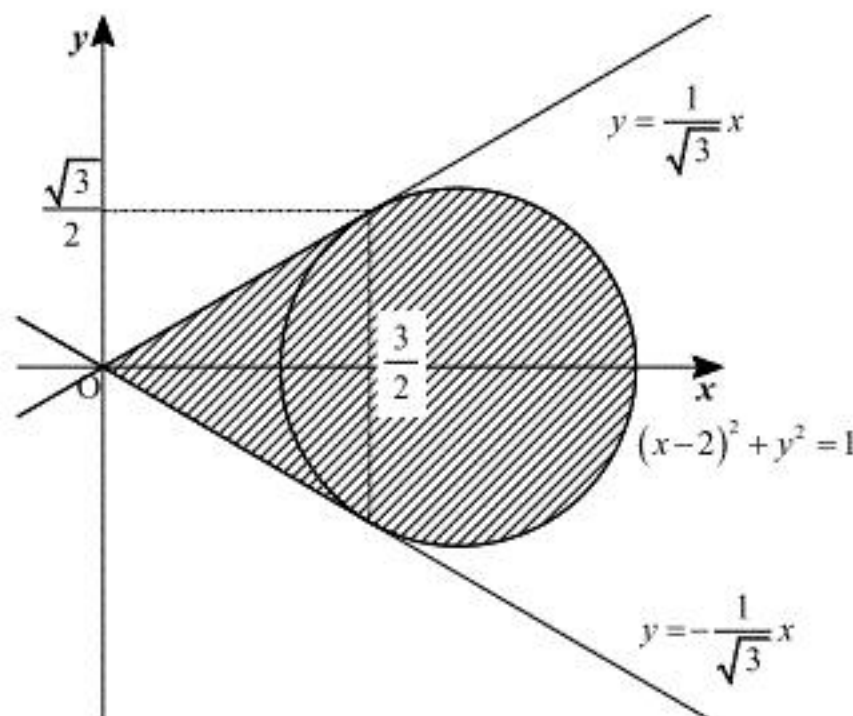
xy 平面上において、原点を通る、円 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ の接線を求める。求める接線を $y = mx$ とおき、これを円の方程式と連立し、 y を消去すると、 x の 2 次方程式

$$(m^2 + 1)x^2 - 4x + 3 = 0$$

を得る。 $y = mx$ が接線となるのは、これが重解を持つときであるから、判別式を D として、

$$\frac{D}{4} = 4 - 3(m^2 + 1) = 0 \quad \therefore m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

と求まる。したがって、求める領域は下図の斜線部のようになる。ただし、境界を含む。



(答) 前図

問 3

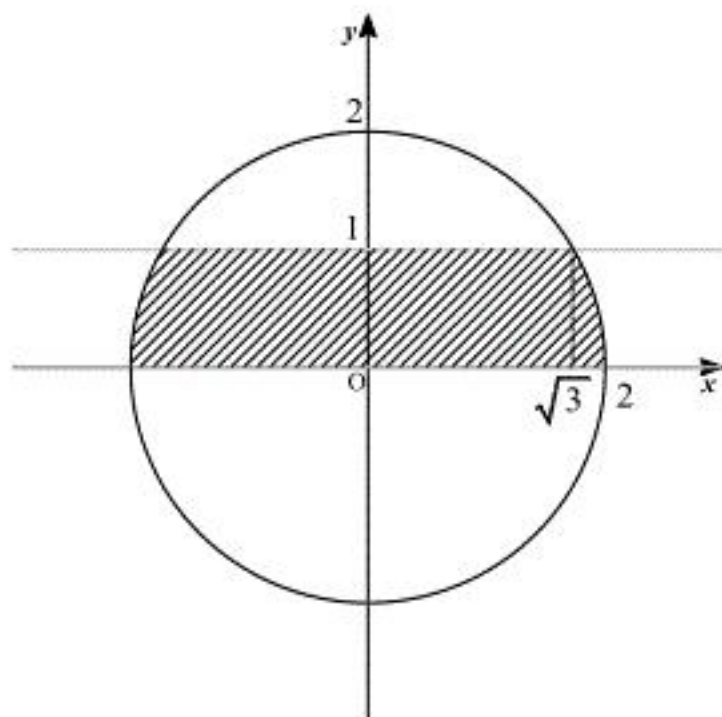
接点と円の中心とをつないで、図形を分割すると、

$$2 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \pi \times \frac{240^\circ}{360^\circ} = \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$$

球も、円 $x^2 + y^2 = 4$ を x 軸の周りに回転させてできることに注意すれば、求める体積は以下の斜線部を x 軸まわりに回転させてできる立体の体積である。



よって、 y 軸に関する対称性に注意すると、求める体積は

$$\begin{aligned}
 2 \times \left\{ \int_0^{\sqrt{3}} \pi \cdot 1^2 dx + \int_{\sqrt{3}}^2 \pi \left(\sqrt{4-x^2} \right)^2 dx \right\} &= 2\pi \left(\sqrt{3} + \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{\sqrt{3}}^2 \right) \\
 &= \left(\frac{32}{3} - 4\sqrt{3} \right) \pi
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\left(\frac{32}{3} - 4\sqrt{3} \right) \pi$

問 1

$$f'(x) = 5x^4 - 5(a^2 + 1) + 5a^2 = 5(x + a)(x + 1)(x - 1)(x - a)$$

であり、 $a > 1$ であることを考えると、増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ここで、 $f(x)$ が奇関数であることに注意すれば、 $f(a) < 0$ かつ $f(1) > 0$ となる a の条件を求めればよい。

$$f(1) = \frac{10}{3}a^2 - \frac{2}{3}$$

なので、 $a > 1$ のもとで、 $f(1) > 0$ は常に成り立つ。また、

$$f(a) = -\frac{2}{3}a^5 + \frac{10}{3}a^3 = -\frac{2}{3}a^3(a^2 - 5)$$

とであるから、 $a > 1$ において、

$$f(a) < 0 \Leftrightarrow a > \sqrt{5}$$

となる。以上より、求める範囲は、 $a > \sqrt{5}$ である。

(答) $a > \sqrt{5}$

問 2

$$\begin{aligned} f(1) + f(a) &= -\frac{2}{3}a^5 + \frac{10}{3}a^3 + \frac{10}{3}a^2 - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{2}{3}(a^5 + 1) + \frac{10}{3}(a^3 + a^2) \\ &= (a + 1) \left\{ -\frac{2}{3}(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) + \frac{10}{3}a^2 \right\} \\ &= -\frac{2}{3}(a + 1)(a^4 - a^3 - 4a^2 - a + 1) \\ &= -\frac{2}{3}(a + 1)(a + 1)(a^3 - 2a^2 - 2a + 1) \\ &= -\frac{2}{3}(a + 1)^2(a + 1)(a^2 - 3a + 1) \\ &= -\frac{2}{3}(a + 1)^3(a^2 - 3a + 1) \end{aligned}$$

であるので、 $f(1) + f(a)$ は $(a + 1)^3$ で割り切れる。

(答) 割り切れる

問 3

問 1 の条件下では、

$$\begin{aligned} |f(1)| &> |f(a)| \\ \Leftrightarrow f(1) &> -f(a) \\ \Leftrightarrow f(1) + f(a) &> 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{3}(a + 1)^3(a^2 - 3a + 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 3a + 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < a < \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となり、これと $a > \sqrt{5}$ をあわせて、 $\sqrt{5} < a < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ となる。

(答) $\sqrt{5} < a < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

問 4

問 1 と問 3 の条件下で、

$$f(-1) < f(a) < f(-a) < f(1)$$

となる。問 1 の増減表と合わせて考えれば、 $f(x) - c = 0$ が異なる 5 つの実数解をもつためには、 c より大きい極値と、小さい極値がちょうど 2 こずつになるようにすればよいので、求める実数 c の範囲は

$$f(a) < c < f(-a) \Leftrightarrow -\frac{2}{3}a^5 + \frac{10}{3}a^3 < c < \frac{2}{3}a^5 - \frac{10}{3}a^3$$

である。

(答) $-\frac{2}{3}a^5 + \frac{10}{3}a^3 < c < \frac{2}{3}a^5 - \frac{10}{3}a^3$

問 1

$a = \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)とおけば、 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ となるので、これは、 xy 平面上の点を、

原点中心に θ 回転する行列である。

問題より、行列 A は $y = x = (\tan 45^\circ)x$ 上の点 $(1, 1)$ を、 $y = \sqrt{3}x = (\tan 60^\circ)x$ に移すのだから、
 $\theta = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} a &= \sin 15^\circ \\ &= \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{8}} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

問 2

問 1 より、 A^2 は 30° 回転に対応する行列であるから、

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

問 3

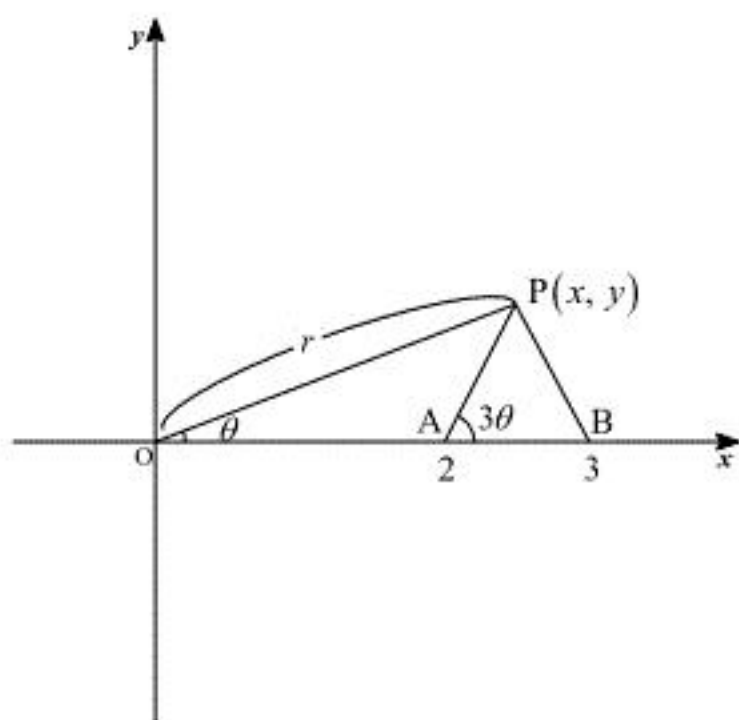
$$\begin{aligned} 2012 \times 15^\circ &= (83 \times 24 + 20) \times 15^\circ \\ &= 83 \times 360^\circ + 300^\circ \end{aligned}$$

に注意して、

$$A^{2012} = \begin{pmatrix} \cos 300^\circ & -\sin 300^\circ \\ \sin 300^\circ & \cos 300^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A^{2012} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



問 1

正弦定理より,

$$\frac{OP}{\sin \angle OAP} = \frac{OA}{\sin \angle APO} \Leftrightarrow \frac{r}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{2}{\sin 2\theta}$$

なので,

$$r = \frac{2 \sin 3\theta}{\sin 2\theta}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad r = \frac{2 \sin 3\theta}{\sin 2\theta}$$

問 2

$$r = \frac{2 \sin 3\theta}{\sin 2\theta} \cdot \frac{2\theta}{3\theta} \cdot \frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{\sin 3\theta}{3\theta} \cdot \frac{1}{\frac{\sin 2\theta}{2\theta}}$$

であり,

$\theta \rightarrow 0$ のとき, $\frac{\sin 3\theta}{3\theta} \rightarrow 1$, $\frac{\sin 2\theta}{2\theta} \rightarrow 1$ であるので, $\lim_{\theta \rightarrow +0} r = 3$ となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{\theta \rightarrow +0} r = 3$$

問 3

問 1 より

$$r = \frac{2 \sin 2\theta \cos \theta + 2 \sin \theta \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = 4 \cos \theta - \frac{1}{\cos \theta}$$

である。 $x \leq 0$ とすれば, $\angle POB \geq 90^\circ$ となり, 条件を満たしえないから, $x > 0$ である。また問題より, $y > 0$ だから, とくに, $r > 0$ でもある。よって, $x = r \cos \theta$ から得られる

$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \frac{1}{\cos \theta} = \frac{r}{x}$$

を代入すると,

$$r = \frac{4x}{r} - \frac{r}{x}$$

となる。両辺に xr をかけて,

$$\begin{aligned} xr^2 &= 4x^2 - r^2 \\ \Leftrightarrow x(x^2 + y^2) &= 4x^2 - (x^2 + y^2) \\ \Leftrightarrow y^2 &= \frac{3x^2 - x^3}{x+1} \end{aligned}$$

となる。いま, $y > 0$ であるので,

$$y = \sqrt{\frac{3x^2 - x^3}{1+x}}$$

とまとまる。定義域は,

$$y > 0 \quad \text{かつ} \quad x > 0$$

$$3x^2 - x^3 > 0 \quad \text{かつ} \quad x > 0$$

$$\therefore 0 < x < 3$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \sqrt{\frac{3x^2 - x^3}{1+x}} \quad (0 < x < 3)$$