

平成24年度入学試験問題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 志望する受験区分に応じて、次の指示に従って解答しなさい。
(指定外の問題に解答した場合には採点されません。)
- ・ 数学選修志願者、数学専攻志願者、情報選修志願者、情報専攻志願者、教育科学専攻志願者で「数学」の免許教科志望者は、
 [3]、[4]、[5]、[6]、[7]に必答すること。
- ・ 理科選修志願者、理科専攻志願者、自然科学コース志願者、教育科学専攻志願者で「理科」の免許教科志望者は、
 [1]、[2]、[3]に必答すること。
- ・ 技術専攻志願者、情報科学コース志願者、教育科学専攻志願者で「技術」の免許教科志望者は、
 [1]、[2]に必答し、
 [3]、[4]のうちから1題選択して解答すること。
3. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

解答上の注意

必答問題については、問題番号の印刷してある解答用紙に解答しなさい。

選択問題については、問題番号の印刷していない解答用紙に、選択した問題の番号を記入してから解答しなさい。

◎印は必答問題, ○印は選択問題を示す。

1 (理科選修・理科専攻・自然科学コース◎, 技術専攻・情報科学コース◎)

問1 円 $C: x^2 + y^2 = 5^2$ 上の点 $P(s, t)$ ($t \neq 0$) における接線の方程式が

$$y = -\frac{s}{t}x + \frac{5^2}{t}$$

となることを示せ。

問2 円 C の接線のうち, 傾きが7となるものを求めよ。

2 (理科選修・理科専攻・自然科学コース◎, 技術専攻・情報科学コース◎)

a を実数の定数とし, 関数

$$y = \cos 2x - 2a \cos x + a^2 - 2a + 3$$

を考える。以下の問いに答えよ。

問1 y の最小値が $\frac{1}{2}$ となるような a の値を求めよ。

問2 問1 で求めた a のもとで, y の最小値を与える x の値を $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で求めよ。

3 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎, 理科選修・理科専攻・自然科学コース◎, 技術専攻・情報科学コース○)

座標空間内において, 2 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 1)$ を端点とする線分 OA , 平面 $z = 2$ 上に点 $(0, 0, 2)$ を中心とする半径 1 の円周 C , および C 上の動点 P があるとする。このとき, 以下の問いに答えよ。

問 1 直線 PA と xy 平面との交点を A' とするとき, A' の軌跡の方程式を求めよ。

問 2 線分 OA' が動いてできる xy 平面上の図形を描け。

問 3 問 2 の図形の面積を求めよ。

- 4 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎, 技術専攻・情報科学コース
○)

座標空間内において, 4 点 $(2, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(-2, 1, 0)$, $(-2, 0, 0)$ を頂点とする長方形を x 軸のまわりに回転してできる円柱と, 原点を中心とする半径 2 の球との共通部分の体積を求めよ。

5 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎)

a を実数の定数とし、5 次多項式 $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}(a^2 + 1)x^3 + 5a^2x$ を考える。ただし、 $a > 1$ とする。

問 1 5 次方程式 $f(x) = 0$ が 5 つの異なる実数解をもつための a の条件を求めよ。

問 2 $f(1) + f(a)$ が $(a + 1)^3$ で割り切れるかどうかを調べよ。

問 3 a が問 1 の条件を満たすとき、 $|f(1)| > |f(a)|$ となるための a の範囲を求めよ。

問 4 a が問 1 と問 3 の条件を満たすとき、5 次方程式 $f(x) - c = 0$ が 5 つの異なる実数解をもつための実数 c の範囲を求めよ。

6 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎)

$0 \leq a \leq 1$ をみたす a に対して $A = \begin{pmatrix} \sqrt{1-a^2} & -a \\ a & \sqrt{1-a^2} \end{pmatrix}$ とし, A の表す 1 次変換によって, 平面上の点 $(1, 1)$ が, 直線 $y = \sqrt{3}x$ 上の点に移されたとする。このとき以下の問いに答えよ。

問 1 a の値を求めよ。

以下, a は問 1 で求めた値とする。

問 2 A^2 を求めよ。

問 3 A^{2012} を求めよ。

7 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎)

座標平面上の3点 $O(0,0)$, $A(2,0)$, $B(3,0)$ について, $\angle PAB = 3\angle POB$ となる $y > 0$ の領域にある点 P を考える。 $r = OP$, $\theta = \angle POB$ とおくとき, 以下の問いに答えよ。

問1 r を θ を用いて表せ。

問2 $\lim_{\theta \rightarrow +0} r$ を求めよ。

問3 点 P の座標を (x, y) で表すとき, y を x の式で表せ。