

与式の $\cos 2x$ を 2 倍角の公式を用いて変形すると,

$$\begin{aligned} y &= \left\{ 2(2\cos^2 x - 1) - (3 + 3\sqrt{3})\cos x + 3\sqrt{3} + 2 \right\} \cos x \\ &= \left\{ 4\cos^2 x - (3 + 3\sqrt{3})\cos x + 3\sqrt{3} \right\} \cos x \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\cos x = t$ とおくと、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ であるから、 $0 \leq t \leq 1$ であり、

$$y = 4t^3 - (3 + 3\sqrt{3})t^2 + 3\sqrt{3}t$$

と変形できる。これを $g(t)$ とおき、 t で微分すると、

$$\begin{aligned} g'(t) &= 12t^2 - 2(3 + 3\sqrt{3})t + 3\sqrt{3} \\ &= 3(2t - 1)(2t - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

となるため、 $g'(t) = 0$ とおいたときの解は $t = \frac{1}{2}$ または $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。したがって、増減表は以下の通りである。

t	0	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	1
$g'(t)$	+	+	0	-	0	+	+
$g(t)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}-1}{4}$	↘	$\frac{9-3\sqrt{3}}{4}$	↗	1

したがって、 $g(t)$ は $t = \frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{3\sqrt{3}-1}{4}$ (> 1) をとり、 $t = 0$ で最小値 0 をとることがわかる。 $t = \cos x$ であるから、最大値をとるのは $x = \frac{\pi}{3}$ のときであり、最小値をとるのは $x = \frac{\pi}{2}$ のときである。

(答) $x = \frac{\pi}{3}$ のとき最大値 $\frac{3\sqrt{3}-1}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$ のとき最小値 0

問 1

$c_n = n^2 a_n$ とおく。与えられた漸化式を変形すると、

$$c_1 = 1, \quad c_n - c_{n-1} = n \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

となる。したがって、 $\{c_n\}$ の一般項は、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 + \sum_{k=2}^n (c_k - c_{k-1}) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n k \\ &= 1 + \left(\sum_{k=1}^n k - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} n(n+1) \end{aligned}$$

であり、これは $n=1$ のときにも成立する。したがって、 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{c_n}{n^2} \\ &= \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

である。これを利用して $\{b_n\}$ の一般項を求めると、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1+1}{2 \cdot 1} \cdot \frac{2+1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3+1}{2 \cdot 3} \cdots \frac{n+1}{2 \cdot n} \\ &= \frac{(n+1)!}{2^n n!} \\ &= \frac{n+1}{2^n} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{n+1}{2n}, \quad b_n = \frac{n+1}{2^n}$$

問 2

$S_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ と、これに $\frac{1}{2}$ をかけた式

$\frac{1}{2}S_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ を辺々引くと、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} S_n - \frac{1}{2}S_n &= \left\{ 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} - \left\{ 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\} \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + (3-2)\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (4-3)\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n+1-n)\left(\frac{1}{2}\right)^n - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

と変形できる。さらに整理し両辺を 2 倍すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_n &= \frac{3}{2} - \frac{n+3}{2^{n+1}} \\ \therefore S_n &= 3 - \frac{n+3}{2^n} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 3 - \frac{n+3}{2^n}$$

問 1

与えられた $P(x)$ について、 $x=1$ および $x=-1$ を代入すると、

$$\begin{aligned} P(1) &= 1 + (3n-2) + (2n-3) - n^2 \\ &= -n^2 + 5n - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^n + (3n-2) + (2n-3)(-1)^n - n^2 \\ &= -n^2 + \{3 + 2(-1)^n\}n - \{2 + 2(-1)^n\} \end{aligned}$$

となる。一方、整式 $P(x)$ を x^2-1 で割った時の余りは高々1次式であるから、整式 $P(x)$ は実数 a および b を用いて $P(x) = (x^2-1)Q(x) + ax + b$ と表すことができる。このとき $x=1$ および $x=-1$ を代入すると、

$$P(1) = a + b$$

$$P(-1) = -a + b$$

となる。したがって、連立方程式

$$\begin{cases} a + b = -n^2 + 5n - 4 \\ -a + b = -n^2 + \{3 + 2(-1)^n\}n - \{2 + 2(-1)^n\} \end{cases}$$

を解くと、 $a = \{1 - (-1)^n\}(n-1)$ 、 $b = -n^2 + \{4 + (-1)^n\}n - \{3 + (-1)^n\}$ となるため、 $P(x)$ を x^2-1

で割ったときの余りは $\{1 - (-1)^n\}(n-1)x - n^2 + \{4 + (-1)^n\}n - \{3 + (-1)^n\}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \{1 - (-1)^n\}(n-1)x - n^2 + \{4 + (-1)^n\}n - \{3 + (-1)^n\}$$

問 2

[1] n が奇数のとき

$(-1)^n = -1$ であるから、(1)で求めた余りは $2(n-1)x - n^2 + 3n - 2$ となる。よって、 $P(x)$ が x^2-1 で割り切れることと、

$$\begin{cases} 2(n-1) = 0 \\ -n^2 + 3n - 2 = 0 \end{cases}$$

がともに成立することは同値であり、これを満たすのは $n=1$ のみである。

[2] n が偶数のとき

$(-1)^n = 1$ であるから、(1)で求めた余りは $-n^2 + 5n - 4$ となる。よって、 $P(x)$ が x^2-1 で割り切れることと、

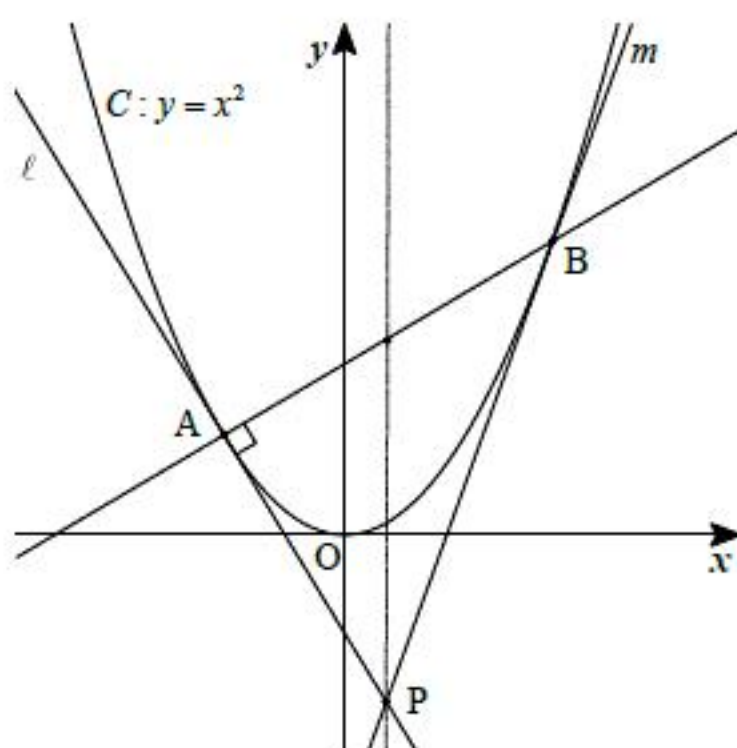
$$\begin{aligned} -n^2 + 5n - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (n-4)(n-1) &= 0 \end{aligned}$$

が成立することは同値であり、これを満たすのは $n=1$ および 4 であるが、仮定より n は偶数でなければならないため、条件を満たす n は $n=4$ である。

以上[1][2]より、求める n は $n=1, 4$ である。

$$(\text{答}) \quad n=1, 4$$

問 1



$y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$ であるから、曲線 C 上の点 (t, t^2) における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y - t^2 &= 2t(x - t) \\ \therefore y &= 2tx - t^2 \end{aligned}$$

である。したがって、接線 l の方程式は $y = 2\alpha x - \alpha^2$ であり、この直線上にある点 P の座標は $(p, 2\alpha p - \alpha^2)$ である。ここで接線 m の曲線 C との接点を (s, s^2) とおくと、接線 m の方程式は

$y = 2sx - s^2$ であり、これが点 P を通ることから、

$$2\alpha p - \alpha^2 = 2sp - s^2$$

が成り立つ。これを s について解いて、

$$\begin{aligned} \{s - (2p - \alpha)\}(s - \alpha) &= 0 \\ \Leftrightarrow s &= \alpha, 2p - \alpha \end{aligned}$$

と求まるが、 $s \neq \alpha$ であるから、点 B の x 座標は $2p - \alpha$ であり、求める座標は

$(2p - \alpha, 4p^2 - 4\alpha p + \alpha^2)$ である。

(答) $(2p - \alpha, 4p^2 - 4\alpha p + \alpha^2)$

問 2

点 A と点 B を結ぶ直線の傾きは、

$$\frac{(4p^2 - 4\alpha p + \alpha^2) - \alpha^2}{(2p - \alpha) - \alpha} = \frac{2p(p - \alpha)}{p - \alpha}$$

で表される。 $p > \alpha$ であるから、約分して $2p$ とできる。これが傾き 2α の接線 l に垂直である

ことから、 $2p \cdot 2\alpha = -1$ 、すなわち $p = -\frac{1}{4\alpha}$ ($\because \alpha < 0$) が成立する。したがって、問 1 で仮定し

た点 P の座標へこれを代入することにより、

$$\left(-\frac{1}{4\alpha}, 2\alpha \cdot \left(-\frac{1}{4\alpha}\right) - \alpha^2\right) = \left(-\frac{1}{4\alpha}, -\alpha^2 - \frac{1}{2}\right)$$

と求まる。

(答) $\left(-\frac{1}{4\alpha}, -\alpha^2 - \frac{1}{2}\right)$

問 3

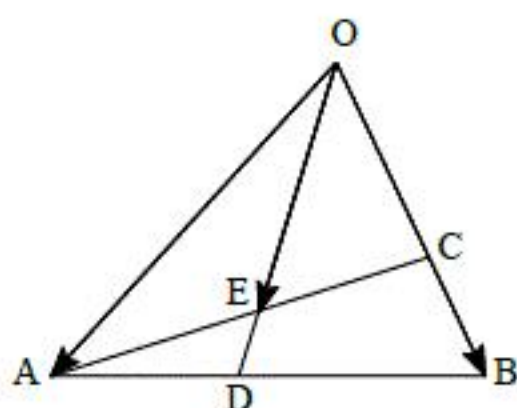
点 P と線分 AB の中点を結ぶ直線は、 $\triangle ABP$ の面積を 2 等分する。ここで、線分 AB の中点の x 座標を求めると、

$$\frac{\alpha + 2p - \alpha}{2} = p$$

であり、これは点 P の x 座標に等しい。したがって、点 P を通り $\triangle ABP$ の面積を 2 等分する

直線は $x = p = -\frac{1}{4\alpha}$ である。

(答) $x = -\frac{1}{4\alpha}$



$AE:EC=t:(1-t)$ とおくと、

$$\overrightarrow{OE} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OC}$$

と表せる。ここで、問題文より $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} = \frac{3}{5}\vec{b}$ であるから、

$$\overrightarrow{OE} = (1-t)\vec{a} + \frac{3}{5}t\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。一方、問題文より $AD:DB=s:(1-s)$ であるから、 $\overrightarrow{OD} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b}$ である。点 E は OD 上にあるから、実数 k を用いて $\overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OD}$ と表せる。したがって、

$$\overrightarrow{OE} = k(1-s)\vec{a} + ks\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。ここで、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は 1 次独立であるから、①と②を係数比較することにより、

$$\begin{cases} 1-t = k(1-s) \\ \frac{3}{5}t = ks \end{cases}$$

が成り立つ。これを解いて $t = \frac{5s}{2s+3}$ 、 $k = \frac{3}{2s+3}$ であるから、これを②へ代入して、

$$\overrightarrow{OE} = \frac{3(1-s)}{2s+3}\vec{a} + \frac{3s}{2s+3}\vec{b}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad \frac{3(1-s)}{2s+3}\vec{a} + \frac{3s}{2s+3}\vec{b}$$

問 2

$AE:EC=1:1$ であれば、 $\triangle OAE$ と $\triangle OCE$ の面積は等しくなる。問 1 の結果により、

$$\begin{aligned} AE:EC &= \frac{5s}{2s+3} : \left(1 - \frac{5s}{2s+3}\right) \\ &= \frac{5s}{2s+3} : \frac{3-3s}{2s+3} \end{aligned}$$

であるから、方程式

$$\frac{5s}{2s+3} = \frac{3-3s}{2s+3}$$

を解いて、 $s = \frac{3}{8}$ と求まる。

$$\text{(答)} \quad s = \frac{3}{8}$$

問 1

点 A を通り傾きが m の直線の方程式は $y = m(x+1)$ で与えられる。したがって、これを円 C の方程式へ代入し、 x について解くと、

$$\begin{aligned} x^2 + m^2(x+1)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \{(1+m^2)x - (1-m^2)\}(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

より、 $x = -1, \frac{1-m^2}{1+m^2}$ である。ここで、 $x = -1$ は点 A の x 座標であるから、点 P の x 座標は

$\frac{1-m^2}{1+m^2}$ であり、このときの点 P の y 座標は

$$m\left(\frac{1-m^2}{1+m^2} + 1\right) = \frac{2m}{1+m^2}$$

であるから、点 P の座標は $\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2}\right)$ と求められる。

$$(\text{答}) \left(\frac{1-m^2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2}\right)$$

問 2

$AQ = \frac{1-m^2}{1+m^2} - (-1) = \frac{2}{1+m^2}$, $PQ = \frac{2m}{1+m^2}$ であるから、 $\triangle APQ$ の面積 $S(m)$ は、

$$\begin{aligned} S(m) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1+m^2} \cdot \frac{2m}{1+m^2} \\ &= \frac{2m}{(1+m^2)^2} \end{aligned}$$

である。これを m について微分すると、

$$\begin{aligned} S'(m) &= \frac{2(1+m^2)^2 - 2m \cdot 2(1+m^2) \cdot 2m}{(1+m^2)^4} \\ &= \frac{2-6m^2}{(1+m^2)^3} \end{aligned}$$

であるから、 $S'(m) = 0$ となるのは $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のときである。また、 $\lim_{m \rightarrow \infty} S(m) = 0$ である。以上

より、増減表は以下のとおりである。

m	(0)	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	(∞)
$S'(m)$	(+)	+	0	-	-
$S(m)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	(0)

したがって、 $\triangle APQ$ の面積を最大とする m の値は $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ である。

$$(\text{答}) \frac{\sqrt{3}}{3}$$

問 1

$x \neq 0$ であるから、方程式(*)の両辺を x^2 で割ると、

$$x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

となる。ここで、 $x + \frac{1}{x} = z$ より、 $z^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ であるから、方程式にこれらを代入すること

により、

$$z^2 + az + b - 2 = 0$$

と変形できる。

(答) $z^2 + az + b - 2 = 0$

問 2

2 次関数 $g(z) = z^2 + az + b - 2$ を考える。平方完成すると

$$g(z) = \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b - 2$$

であり、軸は $z = -\frac{a}{2}$ 、頂点の y 座標は $g\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + b - 2$ である。このとき、2 次方程式

$g(z) = 0$ の解の絶対値がすべて 2 以下の実数であるための条件は、

$$-2 \leq -\frac{a}{2} \leq 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$g\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + b - 2 \leq 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$g(-2) = 4 - 2a + b - 2 \geq 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$g(2) = 4 + 2a + b - 2 \geq 0 \quad \dots \textcircled{4}$$

をすべて満たしていることである。問題文より $|2a| - 2 < 2$ 、すなわち $|a| < 2$ であるから、①は成り立つ。また、

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{a}{2}\right) &= -\frac{a^2}{4} + b - 2 \\ &< -\frac{a^2}{4} + 2 - 2 \\ &= -\frac{a^2}{4} \leq 0 \end{aligned}$$

であるから、②も成り立つ。また、

$$\begin{aligned} \pm 2a + b + 2 &> \pm 2a + |2a| - 2 + 2 \\ &= \pm 2a + |2a| \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

であるから、③および④も成り立つ。以上より、方程式 $g(z) = 0$ の解の絶対値はすべて 2 以下であることが示された。

(証明終)

問 3

問 2 において $g(\pm 2) = 4 \pm 2a + b - 2 > 0$ であったから、 $z = \pm 2$ は方程式(*)の解ではない。これ

を利用して x についての方程式 $x + \frac{1}{x} = z$ ($|z| < 2$) を解くと、 $z^2 - 4 < 0$ であるから、

$$\begin{aligned} x^2 - zx + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{z}{2} \pm \frac{\sqrt{4 - z^2}}{2} i \left(\frac{\sqrt{4 - z^2}}{2} \neq 0 \right) \end{aligned}$$

と常に虚数の解が求まる。この解の「大きさ」は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4 - z^2}}{2}\right)^2 &= \frac{z^2}{4} + \frac{4 - z^2}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

であるから、方程式(*)の解はすべて虚数であり、それらの大きさはすべて 1 であることが示された。

(証明終)

問 1

$x(t)$ および $y(t)$ をそれぞれ t で微分すると,

$$\begin{aligned}x'(t) &= e^t \cos t - e^t \sin t \\&= x(t) - y(t) \\y'(t) &= e^t \sin t + e^t \cos t \\&= x(t) + y(t)\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

と表すことができるから, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ である。

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

問 2

[i] $n=1$ のとき, 問 1 の結果より $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A^1 \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ となる。

[ii] $n=k$ のとき $\begin{pmatrix} x^{(k)}(t) \\ y^{(k)}(t) \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ が成立すると仮定する。このとき $A^k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{aligned}x^{(k)}(t) &= ax(t) + by(t) \\y^{(k)}(t) &= cx(t) + dy(t)\end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned}x^{(k+1)}(t) &= a(x(t) - y(t)) + b(x(t) + y(t)) \\&= (a+b)x(t) + (a-b)y(t) \\y^{(k+1)}(t) &= c(x(t) - y(t)) + d(x(t) + y(t)) \\&= (c+d)x(t) + (c-d)y(t)\end{aligned}$$

とそれぞれ求まり, これを行列の積の形に書き換えると,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x^{(k+1)}(t) \\ y^{(k+1)}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c+d & c-d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\&= A^k A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A^{k+1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となるから, $n=k+1$ のときも成立する。

したがって, [i], [ii] から数学的帰納法により, $n \geq 1$ に対し $\begin{pmatrix} x^{(n)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ となることが

示された。

(証明終)

問 3

ケーリー・ハミルトンの定理により,

$$A^2 - (1+1)A + (1+1)E = O$$

が成り立つ。これより,

$$\begin{aligned}A^2 &= 2A - 2E \\A^3 &= 2A^2 - 2A \\&= 2(2A - 2E) - 2A \\&= 2A - 4E \\A^4 &= 2A^2 - 4A \\&= 2(2A - 2E) - 4A \\&= -4E\end{aligned}$$

と A^4 が求められるから,

$$\begin{aligned}\overline{v}_{2013}(\pi) &= A^{2013} \begin{pmatrix} -e^\pi \\ 0 \end{pmatrix} \\&= (A^4)^{503} A \begin{pmatrix} -e^\pi \\ 0 \end{pmatrix} \\&= (-4)^{503} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^\pi \\ 0 \end{pmatrix} \\&= -4^{503} \begin{pmatrix} -e^\pi \\ -e^\pi \end{pmatrix} = 2^{1006} \begin{pmatrix} e^\pi \\ e^\pi \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 2^{1006} (e^\pi, e^\pi)$$

区分求積法を用いることにより,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \cdot \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} \log(1+x) dx$$

と変形できる。ここで, $\{\log(1+x)\}' = \frac{1}{1+x}$ であるから,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x} \log(1+x) dx &= \int_0^1 \log(1+x) \{\log(1+x)\}' dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \{\log(1+x)\}^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \{(\log 2)^2 - (\log 1)^2\} = \frac{1}{2} (\log 2)^2 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{1}{2} (\log 2)^2$