

平成25年度入学試験問題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 志望する受験区分に応じて、次の指示に従って解答しなさい。
(指定外の問題に解答した場合には採点されません。)
 - ・ 数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻の受験者は
[5], [6], [7], [8], [9]に必答すること。
 - ・ 教育科学専攻(中等)・理科選修・理科専攻・自然科学コースの受験者は
[3], [4], [5]に必答すること。
 - ・ 技術専攻・情報科学コースの受験者は
[3], [4]に必答し、
[5], [6]のうちから1題を選択し解答すること。
 - ・ 教育科学選修(初等)の受験者および音楽選修・音楽専攻・美術選修・美術専攻・保健体育選修・保健体育専攻・家庭選修・家庭専攻・特別支援学校教員養成課程の受験者は
[1], [2]に必答すること。
3. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

解答上の注意

必答問題については、問題番号の印刷してある解答用紙に解答しなさい。

選択問題については、問題番号の印刷していない解答用紙に、選択した問題の番号を記入してから解答しなさい。

◎印は必答問題、○印は選択問題を示す。

- 1 (教育科学選修(初等)・音楽選修・音楽専攻・美術選修・美術専攻・保健体育選修・保健体育専攻・家庭選修・家庭専攻・特別支援学校教員養成課程◎)

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ とする。

$$y = \left\{ 2 \cos 2x - (3 + 3\sqrt{3}) \cos x + 3\sqrt{3} + 2 \right\} \cos x$$

の最大値・最小値と、そのときの x の値をそれぞれ求めよ。

- 2 (教育科学選修(初等)・音楽選修・音楽専攻・美術選修・美術専攻・保健体育選修・保健体育専攻・家庭選修・家庭専攻・特別支援学校教員養成課程◎)

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1} = n \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

で定める。また、数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = a_1 a_2 \cdots a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

問1 数列 $\{a_n\}$ の一般項と、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

問2 $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$ とおくとき、 S_n を求めよ。

- 3 (教育科学専攻(中等)・理科選修・理科専攻・自然科学コース◎, 技術専攻・情報科学コース◎)

n を正の整数とし, 整式

$$P(x) = x^{3n} + (3n - 2)x^{2n} + (2n - 3)x^n - n^2$$

を考える。以下の問いに答えよ。

問1 $P(x)$ を $x^2 - 1$ で割った余りを求めよ。

問2 $P(x)$ が $x^2 - 1$ で割り切れるような n の値をすべて求めよ。

4 (教育科学専攻(中等)・理科選修・理科専攻・自然科学コース◎, 技術専攻・情報科学コース◎)

曲線 $y = x^2$ を C とする。 C 上の点 $A(\alpha, \alpha^2)$ ($\alpha < 0$) における曲線 C の接線を ℓ とする。また, この接線 ℓ 上の点 P から, 曲線 C に ℓ とは異なる接線 m をひく。ただし, 点 P の x 座標は p とし, $p > \alpha$ とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

問1 接線 m の曲線 C との接点 B の座標を求めよ。

問2 点 A と点 B を通る直線が, 直線 ℓ と垂直となるとき, 点 P の座標を求めよ。

問3 点 P を問2で求めたものとする。このとき, 点 P を通り, $\triangle ABP$ の面積を2等分する直線の方程式を求めよ。

- 5 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎, 教育科学専攻(中等)・理科選修・理科専攻・自然科学コース◎, 技術専攻・情報科学コース○)

同一直線上にない3点 O, A, B がある。線分 OB を $3:2$ に内分する点を C , 線分 AB を $s:(1-s)$ ($0 < s < 1$) に内分する点を D とし, 線分 OD と線分 AC の交点を E とする。以下の問いに答えよ。

問1 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくとき, $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ と s を用いて表せ。

問2 $\triangle OAE$ と $\triangle OCE$ の面積が等しくなるような s の値を求めよ。

6 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎, 技術専攻・情報科学コース○)

座標平面上の円 $C: x^2 + y^2 = 1$ と点 $A(-1, 0)$ に対し, 点 A を通る傾き m ($m > 0$) の直線と円 C との交点で, 点 A とは異なる点を P とする。また, 点 P から x 軸に下した垂線を PQ とする。以下の問いに答えよ。

問1 点 P の座標を m を用いて表せ。

問2 $\triangle APQ$ の面積を最大とする m の値を求めよ。

7 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎)

2つの実数 a, b は $|2a| - 2 < b < 2$ をみたしている。このとき、 x の4次方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \quad (*)$$

を考える。

問1 $x \neq 0$ とする。 $z = x + \frac{1}{x}$ とおくとき、方程式(*)を z で表せ。

問2 問1で求めた z の方程式の解は、すべて絶対値が2以下の実数であることを示せ。

問3 複素数 $\alpha = p + qi$ (p, q は実数) に対し、 $\sqrt{p^2 + q^2}$ を複素数 α の「大きさ」ということにする。ただし i は虚数単位を表す。このとき、4次方程式(*)の解はすべて虚数で、それらの大きさはすべて1であることを示せ。

8 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎)

O を原点とする座標平面上を動く点 P の時刻 t における座標 $P(x(t), y(t))$ が

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$$

で与えられている。

問1 時刻 t における点 P の速度ベクトル $\vec{v}_1(t) = (x'(t), y'(t))$ は、ある 2×2 行列 A によって

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

と表すことができる。この行列 A を求めよ。

問2 P の各座標の時刻 t による n 次導関数を成分とするベクトルを $\vec{v}_n(t) = (x^{(n)}(t), y^{(n)}(t))$ とおく。このとき、 $n \geq 1$ に対し、

$$\begin{pmatrix} x^{(n)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

となることを、数学的帰納法を用いて示せ。

問3 $\vec{v}_{2013}(\pi)$ を求めよ。

9 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎)

次の極限值を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} (\log(n+k) - \log n)$$