

問 1

$N(0, 1)$, $P(a, 0)$ ($a > 1$) より, 直線 NP の傾きは $-\frac{1}{a}$ であるから, 直線 NP の方程式は

$$y = -\frac{1}{a}x + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。円 $C: x^2 + y^2 = 1$ より, 交点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 + \left(-\frac{1}{a}x + 1\right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{a^2}\right)x^2 - \frac{2}{a}x &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{\left(1 + \frac{1}{a^2}\right)x - \frac{2}{a}\right\}x &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0, \frac{2a}{a^2 + 1} \end{aligned}$$

となるので, 点 Q の x 座標は $\frac{2a}{a^2 + 1}$ である。よって $\textcircled{1}$ より, 点 Q の y 座標は $\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$ となる。

$$(\text{答}) \quad y = -\frac{1}{a}x + 1, \quad Q\left(\frac{2a}{a^2 + 1}, \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}\right)$$

問 2

$S(0, -1)$, $Q\left(\frac{2a}{a^2 + 1}, \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}\right)$ より, 直線 SQ の傾きは

$$\frac{\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1} - (-1)}{\frac{2a}{a^2 + 1} - 0} = a$$

であるから, 直線 SQ の方程式は

$$y = ax - 1$$

となる。点 R は x 軸上の点であるから, $R\left(\frac{1}{a}, 0\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad y = ax - 1, \quad R\left(\frac{1}{a}, 0\right)$$

問 3

$P(a, 0)$ ($a > 1$), $R\left(\frac{1}{a}, 0\right)$ より,

$$\begin{aligned} PR &= 2 \\ \Leftrightarrow a - \frac{1}{a} &= 2 \quad (\because a > 1) \\ \Leftrightarrow a^2 - 2a - 1 &= 0 \quad (\because a > 1) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} a^2 - 2a - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

であるが, $a > 1$ より, 求める a の値は $a = 1 + \sqrt{2}$ となる。

$$(\text{答}) \quad a = 1 + \sqrt{2}$$

問 1

$\triangle ABD$ に余弦定理を用いると

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \angle BAD$$

となるので, $BD = d$, $AB = 1$, $AD = 10$, $\angle BAD = \alpha$ より

$$\begin{aligned} d^2 &= 1 + 100 - 20 \cos \alpha \\ &= 101 - 20 \cos \alpha \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad d^2 = 101 - 20 \cos \alpha$$

問 2

$\triangle CBD$ に余弦定理を用いると

$$BD^2 = CB^2 + CD^2 - 2CB \cdot CD \cdot \cos \angle BCD$$

となるので, $BD = d$, $CB = 5$, $CD = 6$, $\angle BCD = \beta$ より

$$\begin{aligned} d^2 &= 25 + 36 - 60 \cos \beta \\ &= 61 - 60 \cos \beta \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad d^2 = 61 - 60 \cos \beta$$

問 3

問 1, 問 2 の結果より, α, β は

$$\begin{aligned} 101 - 20 \cos \alpha &= 61 - 60 \cos \beta \\ \Leftrightarrow \cos \alpha - 3 \cos \beta &= 2 \end{aligned}$$

を満たす。

$$(\text{答}) \quad \cos \alpha - 3 \cos \beta = 2$$

問 4

四角形 $ABCD$ が円に内接することから,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 180^\circ \\ \Leftrightarrow \beta &= 180^\circ - \alpha \end{aligned}$$

が成り立つ。これを $\cos \alpha - 3 \cos \beta = 2$ に代入すると, α, β は

$$\begin{aligned} \cos \alpha - 3 \cos (180^\circ - \alpha) &= 2 \\ \Leftrightarrow \cos \alpha + 3 \cos \alpha &= 2 \\ \Leftrightarrow 4 \cos \alpha &= 2 \\ \Leftrightarrow \cos \alpha &= \frac{1}{2} \\ \therefore \alpha &= 60^\circ, \beta = 120^\circ \end{aligned}$$

となり, 同様にして d を求めると,

$$\begin{aligned} d^2 &= 101 - 20 \cos \alpha \\ &= 91 \\ \therefore d &= \sqrt{91} \end{aligned}$$

となる。また, 正弦定理より R を求めると,

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{BD}{\sin \angle BAD} \\ &= \frac{d}{\sin \alpha} \\ &= \frac{\sqrt{91}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{273}}{3} \\ \therefore R &= \frac{\sqrt{273}}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha = 60^\circ, \beta = 120^\circ, R = \frac{\sqrt{273}}{3}$$

問 1

$P(2\cos t, 2\sin t)$, $Q(\sin 2t, \cos 2t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) であるから, PQ^2 は

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (\sin 2t - 2\cos t)^2 + (\cos 2t - 2\sin t)^2 \\ &= \sin^2 2t - 4\sin 2t \cos t + 4\cos^2 t + \cos^2 2t - 4\cos 2t \sin t + 4\sin^2 t \\ &= (\sin^2 2t + \cos^2 2t) + 4(\cos^2 t + \sin^2 t) - 4(\sin 2t \cos t + \cos 2t \sin t) \\ &= 1 + 4 - 4\sin 3t \\ &= 5 - 4\sin 3t \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad PQ^2 = 5 - 4\sin 3t$$

問 2

PQ が最大となるとき PQ^2 も最大となるから, PQ^2 の最大値について考えればよい。与えられた条件 $0 \leq t \leq 2\pi$ より, $0 \leq 3t \leq 6\pi$ であるから, $-1 \leq \sin 3t \leq 1$ である。よって, PQ^2 は $\sin 3t = -1$ となるときに最大値 9 をとる。したがって, PQ の最大値は 3 であり, この場合の t を求めると,

$$\begin{aligned} 3t &= \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \end{aligned}$$

となる。

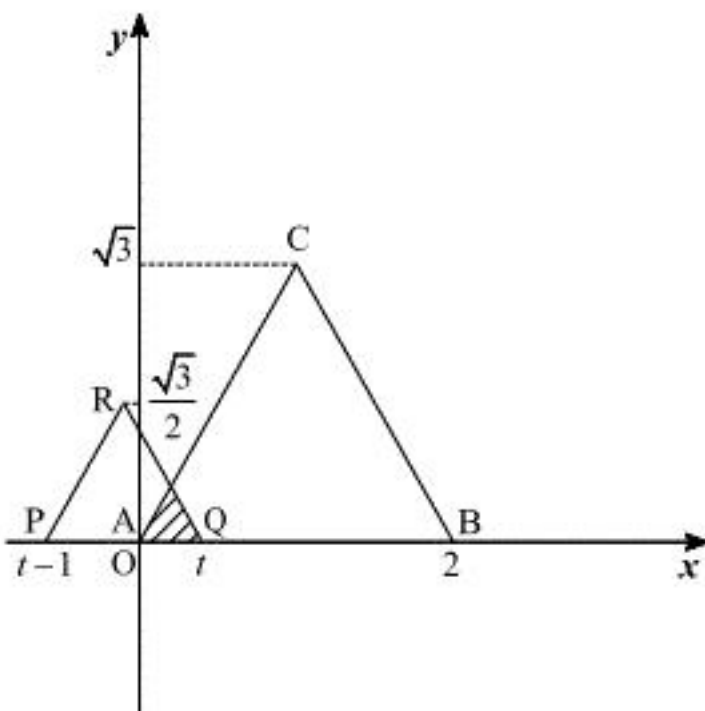
$$(\text{答}) \quad PQ \text{ の最大値: } 3, \quad t = \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

問 1

$\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ の位置関係を t の値で場合分けすることにより考える。

[1] $0 \leq t < 1$ のとき

このとき、 $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ の共通部分は下図の斜線部となる。



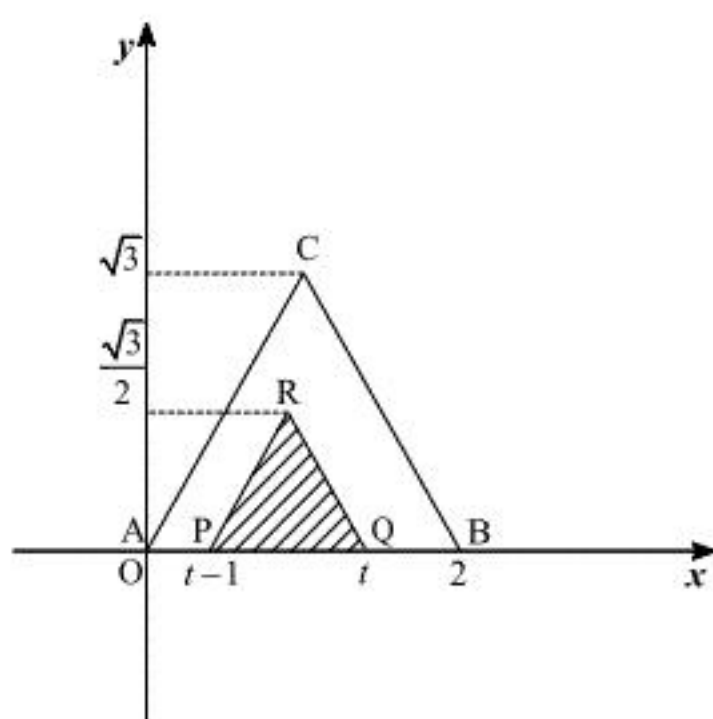
したがって、

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \cdot t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} t^2 \end{aligned}$$

である。

[2] $1 \leq t < 2$ のとき

このとき、 $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ の共通部分は下図の斜線部となる。



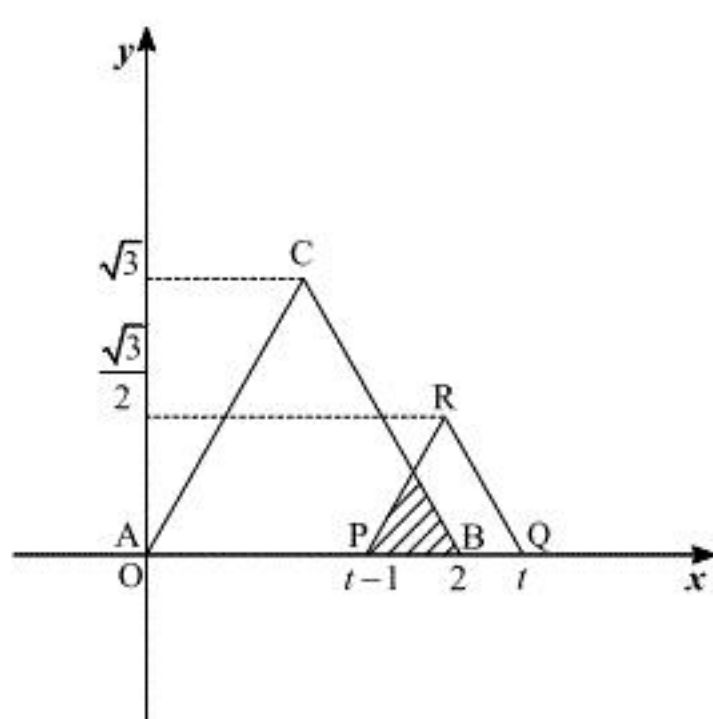
したがって、

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

である。

[3] $2 \leq t < 3$ のとき

このとき、 $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ の共通部分は下図の斜線部となる。



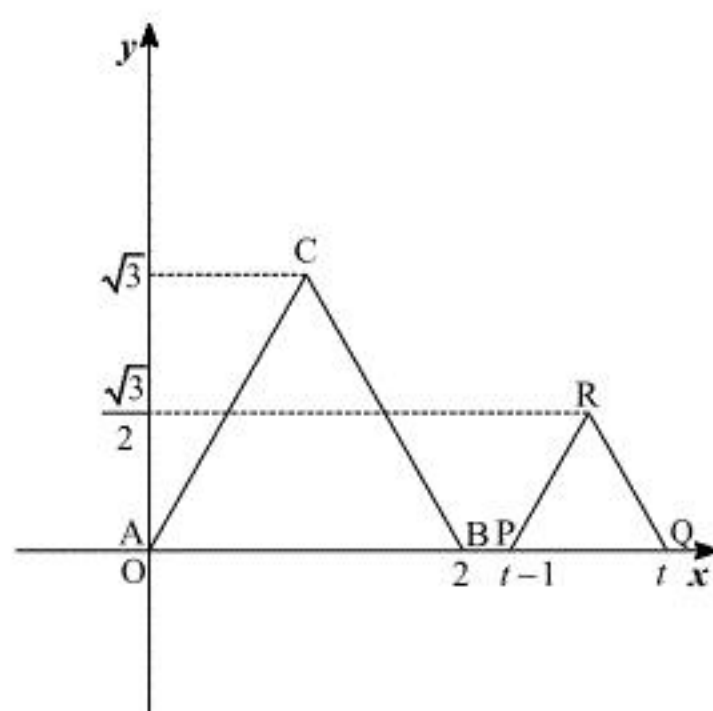
したがって

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} \cdot (3-t) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (3-t) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (t-3)^2 \end{aligned}$$

である。

[4] $3 \leq t$ のとき

このとき、 $\triangle ABC$ と $\triangle PQR$ の位置関係は下図のように共通部分をもたない。

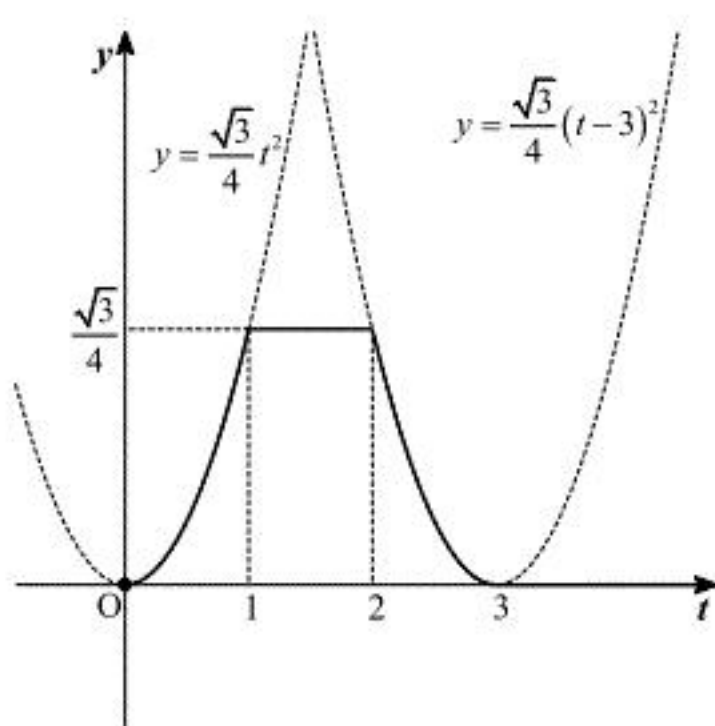


したがって

$$f(t) = 0$$

である。

以上、[1], [2], [3], [4]より、関数 $y = f(t)$ のグラフの概形は次図のようになる。



(答) 前図

問 2

曲線 $y = f(t)$ と t 軸で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 f(t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4} t^2 dt + \int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{4} dt + \int_2^3 \frac{\sqrt{3}}{4} (t-3)^2 dt \\ &= \left[\frac{\sqrt{3}}{12} t^3 \right]_0^1 + \frac{\sqrt{3}}{4} + \left[\frac{\sqrt{3}}{12} (t-3)^3 \right]_2^3 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

と求められる。

(答) $\frac{5\sqrt{3}}{12}$

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおくと, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$ はそれぞれ

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OQ} = (1-q)\vec{a} + q\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OR} = (1-r)\vec{b} + r\vec{c}$$

$$\overrightarrow{OS} = (1-s)\vec{c}$$

と表すことができる。したがって,

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} \\ \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{2} - q\right)\vec{a} + q\vec{b} \\ \overrightarrow{PR} = -\frac{1}{2}\vec{a} + (1-r)\vec{b} + r\vec{c} \\ \overrightarrow{PS} = -\frac{1}{2}\vec{a} + (1-s)\vec{c} \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。4点 P, Q, R, S が同一平面上にあるとき, $\overrightarrow{PR}$ は実数 m, n を用いて

$$\overrightarrow{PR} = m\overrightarrow{PQ} + n\overrightarrow{PS}$$

と表すことができるから,

$$\overrightarrow{PR} = \left(\frac{m}{2} - qm - \frac{n}{2}\right)\vec{a} + mq\vec{b} + n(1-s)\vec{c} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。したがって, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ が互いに1次独立であることから, ①と②を比較して

$$\begin{cases} \frac{m}{2} - qm - \frac{n}{2} = -\frac{1}{2} & \dots \textcircled{3} \\ mq = 1-r & \dots \textcircled{4} \\ n(1-s) = r & \dots \textcircled{5} \end{cases}$$

を得る。ここで, ④, ⑤および $0 < q < 1, 0 < s < 1$ より

$$m = \frac{1-r}{q}, n = \frac{r}{1-s}$$

であるから, これを③に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1-r}{2q} - (1-r) - \frac{r}{2(1-s)} &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1-r}{2q} - (1-r) + \frac{1}{2} &= \frac{r}{2(1-s)} \\ \Leftrightarrow \frac{1-r-2q(1-r)+q}{2q} &= \frac{r}{2(1-s)} \\ \Leftrightarrow \frac{2qr-q-r+1}{2q} &= \frac{r}{2(1-s)} \end{aligned}$$

となる。よって, $0 < q < 1, 0 < r < 1, 0 < s < 1$ より

$$2qr - q - r + 1 = qr + (1-q)(1-r) > 0$$

であるから, s は

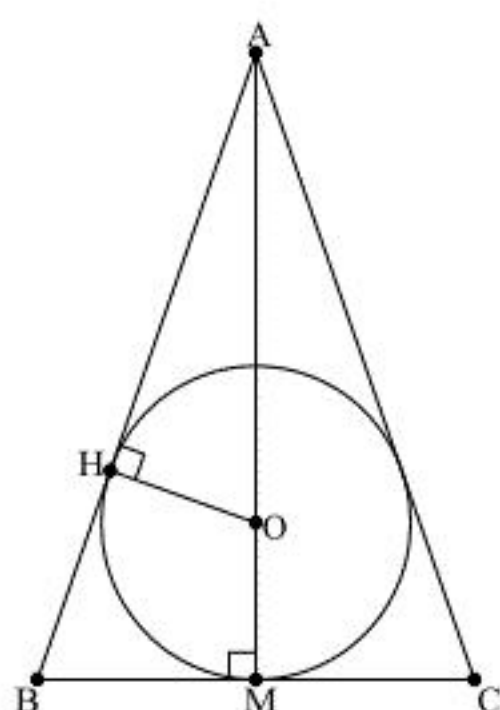
$$\begin{aligned} \frac{2qr-q-r+1}{2q} &= \frac{r}{2(1-s)} \\ \Leftrightarrow \frac{2q}{2qr-q-r+1} &= \frac{2(1-s)}{r} \quad (\because 0 < r < 1, 2qr-q-r+1 > 0) \\ \Leftrightarrow \frac{qr}{2qr-q-r+1} &= 1-s \\ \Leftrightarrow s &= 1 - \frac{qr}{2qr-q-r+1} \end{aligned}$$

と表される。

$$(\text{答}) \quad s = 1 - \frac{qr}{2qr - q - r + 1}$$

問 1

円錐の頂点と底面の中心を通る以下のような断面を考える。



円錐の頂点を点 A、底面の中心を点 M、内接する球の中心を点 O とし、断面にあらわれる底面の直径を BC とする。また、線分 AB と内接球の接点を点 H とする。

$AM = h$ (> 10), $OH = OM = 5$ より $AO = h - 5$ であるので、 $\angle AHO = 90^\circ$ より、

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{(h-5)^2 - 5^2} \\ &= \sqrt{h^2 - 10h} \end{aligned}$$

と表される。ここで、 $\angle AHO = \angle AMB = 90^\circ$ 、 $\angle AOH = \angle ABM$ より、 $\triangle AOH$ と $\triangle ABM$ は相似であるから、

$$\begin{aligned} AH : OH &= AM : BM \\ \Leftrightarrow \sqrt{h^2 - 10h} : 5 &= h : r \\ \Leftrightarrow r\sqrt{h^2 - 10h} &= 5h \\ \therefore r &= \frac{5h}{\sqrt{h^2 - 10h}} = 5\sqrt{\frac{h}{h-10}} \end{aligned}$$

となる。

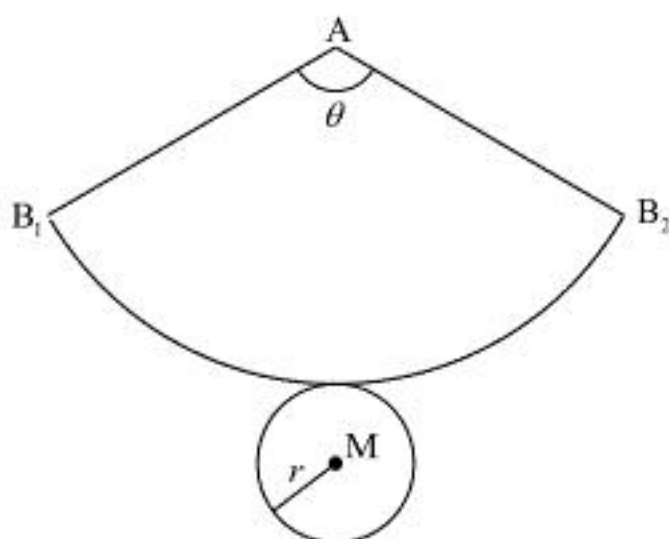
$$(\text{答}) \quad r = 5\sqrt{\frac{h}{h-10}}$$

問 2

$AM = h$, $BM = r$ より

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{h^2 + r^2} \\ &= \sqrt{h^2 + \frac{25h}{h-10}} \\ &= \sqrt{\frac{h^3 - 10h^2 + 25h}{h-10}} \\ &= \sqrt{\frac{h(h-5)^2}{h-10}} \\ &= (h-5)\sqrt{\frac{h}{h-10}} \quad (\because h > 10) \end{aligned}$$

である。ここで、円錐を線分 AB で切り開いた場合の展開図を考える。



展開図における点 B の一方を点 B_1 、もう一方を点 B_2 とする。 $\angle B_1AB_2 = \theta$ とおくと、弧 B_1B_2 の長さと底面の円周の長さが等しいことから、 θ は

$$\begin{aligned} AB \cdot \theta &= 2\pi r \\ \Leftrightarrow (h-5)\sqrt{\frac{h}{h-10}} \cdot \theta &= 2\pi \cdot 5\sqrt{\frac{h}{h-10}} \\ \Leftrightarrow (h-5) \cdot \theta &= 10\pi \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{10\pi}{h-5} \end{aligned}$$

と表せる。したがって、円錐の表面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \pi \cdot AB^2 \cdot \frac{\theta}{2\pi} + \pi r^2 \\ &= \pi \cdot \frac{h(h-5)^2}{h-10} \cdot \frac{5}{h-5} + \pi \cdot \frac{25h}{h-10} \\ &= 5\pi \left\{ \frac{h(h-5)}{h-10} + \frac{5h}{h-10} \right\} \\ &= 5\pi \cdot \frac{h^2}{h-10} \end{aligned}$$

となる。ここで、上式は

$$\frac{h^2}{h-10} = (h-10) + \frac{100}{h-10} + 20$$

と変形できるため、 $h-10 > 0$ より、相加・相乗平均の不等式から、

$$\frac{h^2}{h-10} \geq 2\sqrt{100} + 20 = 40$$

が成り立つ。したがって、この不等式の等号が成立するときに S は最小となり、そのときの h を求めると、

$$\begin{aligned} h-10 &= \frac{100}{h-10} \\ \Leftrightarrow h-10 &= \pm 10 \\ \therefore h &= 20 \quad (\because h > 10) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad h = 20$$

問 1

直線 ℓ は $P(\cos t, \sin t)$ における $C: x^2 + y^2 = 1$ の接線であるから、 ℓ の方程式は

$$\ell: x \cos t + y \sin t = 1$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad x \cos t + y \sin t = 1$$

問 2

線分 OP 、線分 QR はいずれも ℓ と垂直であることから、 $OP \parallel QR$ であるので、

$$\angle POQ = t \left(0 < t < \frac{\pi}{2} \right), \angle PQO = \frac{\pi}{2} \text{ より}$$

$$\angle OPQ = \angle RQP = \frac{\pi}{2} - t$$

である。よって、 $PQ = \sin t$ より、 PR, QR は

$$\begin{aligned} PR &= PQ \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \\ &= \sin t \cos t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QR &= PQ \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - t \right) \\ &= \sin^2 t \end{aligned}$$

と表される。

$$(\text{答}) \quad PR = \sin t \cos t, \quad QR = \sin^2 t$$

問 3

$$\begin{aligned} x(t) &= \sin t \cos t \\ &= \frac{1}{2} \sin 2t \\ y(t) &= \sin^2 t \\ &= \frac{1 - \cos 2t}{2} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \sin 2t &= 2 \cdot x(t) \\ \cos 2t &= 1 - 2 \cdot y(t) \end{aligned}$$

となるので、ここから t を消去すると、

$$\begin{aligned} \{2 \cdot x(t)\}^2 + \{1 - 2 \cdot y(t)\}^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 4\{x(t)\}^2 + 4\left\{y(t) - \frac{1}{2}\right\}^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \{x(t)\}^2 + \left\{y(t) - \frac{1}{2}\right\}^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

を得る。よって、 $x(t) = \frac{1}{2} \sin 2t, y(t) = \frac{1 - \cos 2t}{2} \left(0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$ より、点 $S(x(t), y(t))$ の軌跡は

$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ で表される円の $x > 0$ の部分となる。

$$(\text{答}) \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \quad (x > 0)$$

問 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{より}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (AB)^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (AB)^3 &= (AB)^2 (AB) \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と計算できるので、任意の自然数 n について $(AB)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と推測できる。これを数学的帰納法によって示す。

[1] $n=1$ のとき、 $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より明らかに成り立つ。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき成り立つと仮定すると、 $(AB)^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} (AB)^{k+1} &= (AB)^k (AB) \\ &= \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので $n=k+1$ のときも成り立つ。

以上, [1], [2] より、任意の自然数 n について $(AB)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることが示された。

(証明終)

問 2

$(BA)^n$ は、 $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求められる。 $n \geq 2$ のとき、(1)の結果より $(AB)^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であるから、

$$\begin{aligned} (BA)^n &= B(AB)^{n-1}A \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 1-2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求められ、これは $n=1$ についても成り立つ。したがって、任意の自然数 n に対して

$(BA)^n = \begin{pmatrix} 2^n & 1-2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる。

(答) $\begin{pmatrix} 2^n & 1-2^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$