前期日程

# 平成26年度入学試験問題

# 数　学

**注　意　事　項**

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 志望する受験区分に応じて，次の指示に従って解答しなさい。
   (指定外の問題に解答した場合には採点されません。)
   - 数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻の受験者は
     5, 6, 7, 8, 9に必答すること。
   - 教育科学専攻(中等)・理科選修・理科専攻・自然科学コースの受験者は
     3, 4, 5に必答すること。
   - 技術専攻・情報科学コースの受験者は
     3, 4に必答し，
     5, 6のうちから1題を選択し解答すること。
   - 教育科学選修(初等)の受験者および音楽選修・音楽専攻・美術選修・美術専攻・保健体育選修・保健体育専攻・家庭選修・家庭専攻・特別支援学校教員養成課程の受験者は
     1, 2に必答すること。
3. 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

解答上の注意

必答問題については，問題番号の印刷してある解答用紙に解答しなさい。

選択問題については，問題番号の印刷していない解答用紙に，選択した問題の番号を記入してから解答しなさい。

◎印は必答問題，〇印は選択問題を示す。

$\boxed{1}$ （教育科学選修（初等）・音楽選修・音楽専攻・美術選修・美術専攻・保健体育選修・保健体育専攻・家庭選修・家庭専攻・特別支援学校教員養成課程◎）

円 $C : x^2 + y^2 = 1$ 上に 2 点 N$(0, 1)$, S$(0, -1)$ をとる。また $x$ 軸上に点 P$(a, 0)$ $(a > 1)$ をとり，直線 NP と円 $C$ との交点で，点 N とは異なる点を Q とする。さらに，直線 SQ と $x$ 軸との交点を R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

問 1　直線 NP の方程式を求め，点 Q の座標を $a$ を用いて表せ。

問 2　直線 SQ の方程式を求め，点 R の座標を $a$ を用いて表せ。

問 3　線分 PR の長さが 2 になるときの $a$ の値を求めよ。

$\boxed{2}$ (教育科学選修 (初等)・音楽選修・音楽専攻・美術選修・美術専攻・保健体育選修・保健体育専攻・家庭選修・家庭専攻・特別支援学校教員養成課程◎)

平面上の四角形ABCDにおいて，4点 A, B, C, D が次の (a), (b), (c)の条件をみたしているとする。

(a) $AB = 1, BC = 5, CD = 6, DA = 10$

(b) 3点 A, B, D は同じ直線上にはない。

(c) 3点 B, C, D は同じ直線上にはない。

また，$\angle DAB = \alpha, \angle BCD = \beta$ とし，線分 BD の長さを $d$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

問1 $d^2$ を $\alpha$ を用いて表せ。

問2 $d^2$ を $\beta$ を用いて表せ。

問3 $\alpha, \beta$ がみたす関係式を求めよ。

問4 四角形 ABCD が円に内接するとき，$\alpha, \beta$ と円の半径 $R$ を求めよ。

$\boxed{3}$ （教育科学専攻 (中等)・理科選修・理科専攻・自然科学コース◎，技術専攻・情報科学コース◎）

$0 \leqq t \leqq 2\pi$ とする。座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(2\cos t, 2\sin t)$, $\mathrm{Q}(\sin 2t, \cos 2t)$ に対して，以下の問いに答えよ。

問1　$\mathrm{PQ}^2$ を $t$ を用いて表せ。

問2　PQ の最大値と，そのときの $t$ の値を求めよ。

$\boxed{4}$ (教育科学専攻 (中等)・理科選修・理科専攻・自然科学コース◎, 技術専攻・情報科学コース◎)

座標平面上に点 $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}(2,0)$, $\mathrm{C}(1,\sqrt{3})$ を頂点とする正三角形 ABC をとる。また, 点 $(-1,0)$, $(0,0)$, $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を頂点とする正三角形を $x$ 軸の正の方向に $t$ だけ平行移動して得られる正三角形 PQR を考える。ただし, $t$ は 0 以上の実数とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

問1 $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{PQR}$ の共通部分の面積を $f(t)$ とするとき, 関数 $y=f(t)$ のグラフの概形を描け。

問2 曲線 $y=f(t)$ と $t$ 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

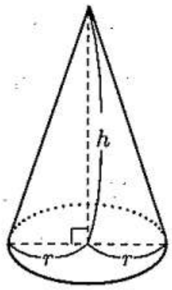
$\boxed{5}$ （数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎，教育科学専攻 (中等)・理科選修・理科専攻・自然科学コース◎，技術専攻・情報科学コース○）

座標空間内の4点 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(1,0,0)$, $\mathrm{B}(0,1,0)$, $\mathrm{C}(0,0,1)$ に対して線分 OA の中点を P，線分 AB を $q:(1-q)$ の比に内分する点を Q，線分 BC を $r:(1-r)$ の比に内分する点を R，線分 CO を $s:(1-s)$ の比に内分する点を S とする。ただし，$0<q<1$, $0<r<1$, $0<s<1$ である。

4点 P, Q, R, S が同一平面上にあるとき，$s$ を $q, r$ を用いて表せ。

6 （数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎，技術専攻・情報科学コース○）

図のような，底面の半径が $r$，高さが $h$ の円錐があり，そこに半径5の球が内接しているとする。ただし，$h > 10$ とする。以下の問いに答えよ。




問1　この円錐の底面の半径 $r$ を $h$ を用いて表せ。

問2　この円錐の表面積を最小にする $h$ の値を求めよ。

$\boxed{7}$ （数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎）

$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ とする。座標平面上に，原点 O を中心とする単位円 $C$ 上の点 $\mathrm{P}(\cos t, \sin t)$ と，$x$ 軸上の点 $\mathrm{Q}(\cos t, 0)$ をとり，点 P における $C$ の接線を $\ell$ とする。また，点 Q から $\ell$ に下ろした垂線と $\ell$ との交点を R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

問1　接線 $\ell$ の方程式を求めよ。

問2　PR と QR を $t$ を用いて表せ。

問3　問2で求めた PR を $x(t)$，QR を $y(t)$ とする。点 $\mathrm{S}(x(t), y(t))$ の軌跡を求めよ。

$\boxed{8}$ (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎)

$A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

問1　自然数 $n$ に対して，$(AB)^n$ を推測し，それを数学的帰納法で証明せよ。

問2　自然数 $n$ に対して，$(BA)^n$ を求めよ。

$\boxed{9}$ （数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎）

$1 \leqq t \leqq e$ とする。定積分 $S(t)=\displaystyle\int_1^e |x-t|\frac{\log x}{x}\,dx$ を最小にする $t$ の値を求めよ。

ただし，$\log$ は自然対数を表し， $e$ は自然対数の底を表す。