

問 1

$t = \cos x - \sin x$ とおくと、

$$\begin{aligned} t &= -\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) \\ &= -\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

となり、 $0 \leq x \leq \pi$ より $-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$ である。この範囲において、

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$$

であるから、 t の取りうる値の範囲は、

$$-\sqrt{2} \leq t \leq 1$$

である。

(答) $-\sqrt{2} \leq t \leq 1$

問 2

$$\begin{aligned} t^2 &= (\cos x - \sin x)^2 \\ &= \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x \\ &= 1 - \sin 2x \end{aligned}$$

より、

$$\sin 2x = 1 - t^2$$

となる。ここで、2 倍角の公式より

$$\begin{aligned} y &= (\cos x - \sin x + 1) \sin 2x \\ &= (t + 1)(1 - t^2) \\ &= -t^3 - t^2 + t + 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $y = -t^3 - t^2 + t + 1$

問 3

$y = f(t)$ とおくと、 $-\sqrt{2} \leq t \leq 1$ において、

$$\begin{aligned} f'(t) &= -3t^2 - 2t + 1 \\ &= -(t + 1)(3t - 1) \end{aligned}$$

となり、 $f'(t) = 0$ とすると、

$$t = -1, \frac{1}{3}$$

となる。よって、増減表は以下のようになる。

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	

ここで、

$$\begin{aligned} f(1) &= -1 - 1 + 1 + 1 = 0 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) &= -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{32}{27} \\ f(-1) &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \\ f(-\sqrt{2}) &= 2\sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} + 1 = \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

であり、 $4 > 2$ より $2 > \sqrt{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} \sqrt{2} - 1 &< 1 < \frac{32}{27} \\ \therefore f(-\sqrt{2}) &< f\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

である。よって、 $t = \frac{1}{3}$ のとき最大値 $\frac{32}{27}$ 、 $t = \pm 1$ のとき最小値 0 をとる。

(答) 最大値 $\frac{32}{27}$ ($t = \frac{1}{3}$)

最小値 0 ($t = \pm 1$)

問 1

与えられた条件より、

$$QR = QS, QT = QT'$$

である。さらに、対頂角が等しいことから、

$$\angle SQT = \angle RQT'$$

である。したがって、三角形の2組の辺とその間の角の大きさが等しいため、

$$\triangle SQT \cong \triangle RQT'$$

であるから、

$$\angle STQ = \angle RT'Q$$

となる。一方、 ℓ および m はともに円の接線であるから、

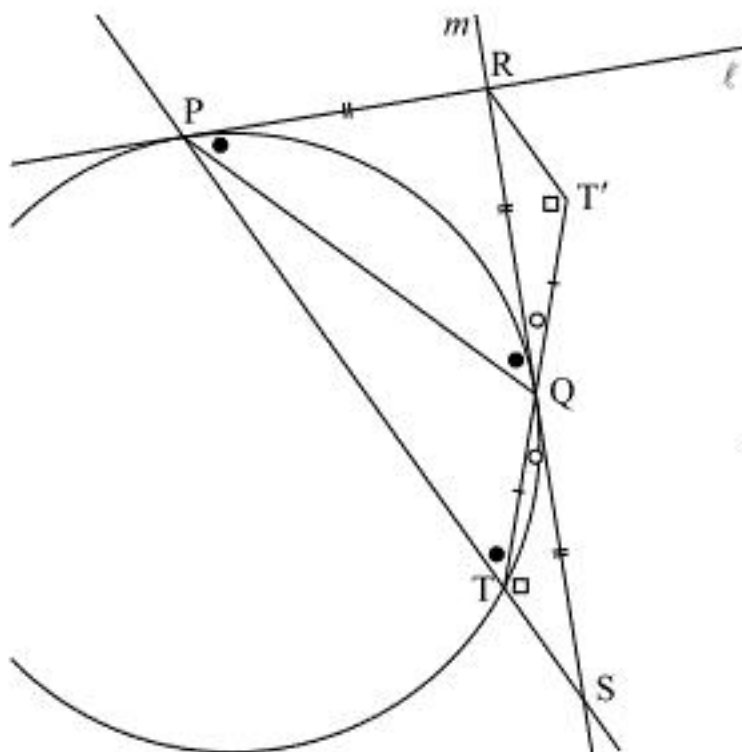
$$PR = QR$$

$$\therefore \angle QPR = \angle PQR$$

が成り立ち、 m に関する接弦定理より、

$$\angle PQR = \angle PTQ$$

が成り立つ。これらの関係を図示すると、以下のようになる。



上図より、

$$\angle QPR + \angle RT'Q = \angle PTQ + \angle STQ = 180^\circ$$

とわかるから、四角形 $PQT'R$ の向かい合う内角同士の和は 180° である。したがって、四角形 $PQT'R$ は円に内接するから、4点 P, Q, T', R は同一円周上にある。

(証明終)

問 2

問 1 の過程より、 $RP = RQ$ であるから、与えられた条件とあわせて、

$$QP = \sqrt{10}, PR = QR = \sqrt{5}$$

である。したがって、余弦定理より

$$\cos \angle QPR = \frac{10 + 5 - 5}{2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \angle QPR = 45^\circ$$

である。このとき、 $\triangle PQR$ は $\angle R = 90^\circ$ の直角二等辺三角形であるから、

$$\triangle PQR = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \frac{5}{2}$$

である。一方、問 1 の過程より

$$\angle QPR + \angle RT'Q = 180^\circ$$

$$\therefore \angle RT'Q = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

であるから、 $RT' = 1, T'Q = \sqrt{2}$ より

$$\triangle RT'Q = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 135^\circ = \frac{1}{2}$$

となる。以上より、四角形 $PQT'R$ の面積は

$$\triangle PQR + \triangle RT'Q = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

である。

(答) $\angle QPR = \frac{\pi}{4}$, 四角形 $PQT'R$ の面積: 3

問 1

$$\begin{aligned} C_1: y &= x^2 \text{ より,} \\ y' &= 2x \end{aligned}$$

であるから、点 $A(a, a^2)$ における C_1 の接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= 2a(x - a) + a^2 \\ \therefore y &= 2ax - a^2 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。同様に、点 $B(b, b^2)$ における C_1 の接線の方程式は、

$$y = 2bx - b^2 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

である。①②より、点 P の x 座標は、

$$\begin{aligned} 2ax - a^2 &= 2bx - b^2 \\ \Leftrightarrow 2(b - a)x &= (b - a)(a + b) \\ \therefore x &= \frac{a + b}{2} (\because b - a > 0) \end{aligned}$$

であり、これを①に代入すると、点 P の y 座標は

$$\begin{aligned} y &= 2a \cdot \frac{a + b}{2} - a^2 \\ &= ab \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答) } P\left(\frac{a + b}{2}, ab\right)$$

問 2

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} &= \left(\frac{a - b}{2}, a(a - b)\right) \\ \overrightarrow{PB} &= \left(\frac{b - a}{2}, b(b - a)\right) \end{aligned}$$

であるから、求める内積は、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= \left(\frac{a - b}{2}, a(a - b)\right) \cdot \left(\frac{b - a}{2}, b(b - a)\right) \\ &= -\frac{1}{4}(b - a)^2 - ab(b - a)^2 \\ &= -\frac{1}{4}(4ab + 1)(b - a)^2 \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答) } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -\frac{1}{4}(4ab + 1)(b - a)^2$$

問 3

$P(s, s^2 - s)$ と表されるから、問 1 の結果より、

$$\begin{aligned} \begin{cases} s = \frac{a + b}{2} \\ s^2 - s = ab \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2s \\ ab = s^2 - s \end{cases} \end{aligned}$$

である。これを用いると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= -\frac{1}{4}(4ab + 1)(b - a)^2 \\ &= -\frac{1}{4}(4ab + 1)\{(a + b)^2 - 4ab\} \\ &= -\frac{1}{4}(4s^2 - 4s + 1)\{4s^2 - 4s^2 + 4s\} \\ &= -s(2s - 1)^2 \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答) } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -s(2s - 1)^2$$

問 4

与えられた条件より、 $0 < s < 1$ である。ここで、 a, b は t についての 2 次方程式

$$t^2 - 2st + s^2 - s = 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

の異なる 2 つの実数解であるから、③の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= s^2 - s^2 + s \\ &= s \\ &> 0 \quad (\because 0 < s < 1) \end{aligned}$$

より、曲線 C_2 上のどの点を点 P として選んでも、対応する点 A, B の組が存在する。ここで、問 3 で求めた内積の値を $f(s)$ とすると、 $0 < s < 1$ において、

$$\begin{aligned} f'(s) &= -(2s - 1)^2 - 4s(2s - 1) \\ &= -(2s - 1)(6s - 1) \end{aligned}$$

であり、 $f'(s) = 0$ とすると、

$$s = \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$$

となる。よって、 $f(s)$ の増減表は以下ようになる。

s	(0)	...	$\frac{1}{6}$	...	$\frac{1}{2}$	...	(1)
$f'(s)$		—	0	+	0	—	
$f(s)$		↘	極小	↗	極大	↘	

ここで、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)^2 = 0 \\ f(0) &= -0 \cdot (2 \cdot 0 - 1)^2 = 0 \end{aligned}$$

であるから、 $f(s)$ は $s = \frac{1}{2}$ で最大となり、このとき $P(s, s^2 - s)$ より

$$P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

である。

$$\text{(答) } P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

問 1

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

とおくと、点 $(-1, 4)$ と点 $(2, 8)$ が別々の領域に属するための条件は、

$$(4 > f(-1) \text{ かつ } 8 < f(2)) \text{ または } (4 < f(-1) \text{ かつ } 8 > f(2))$$

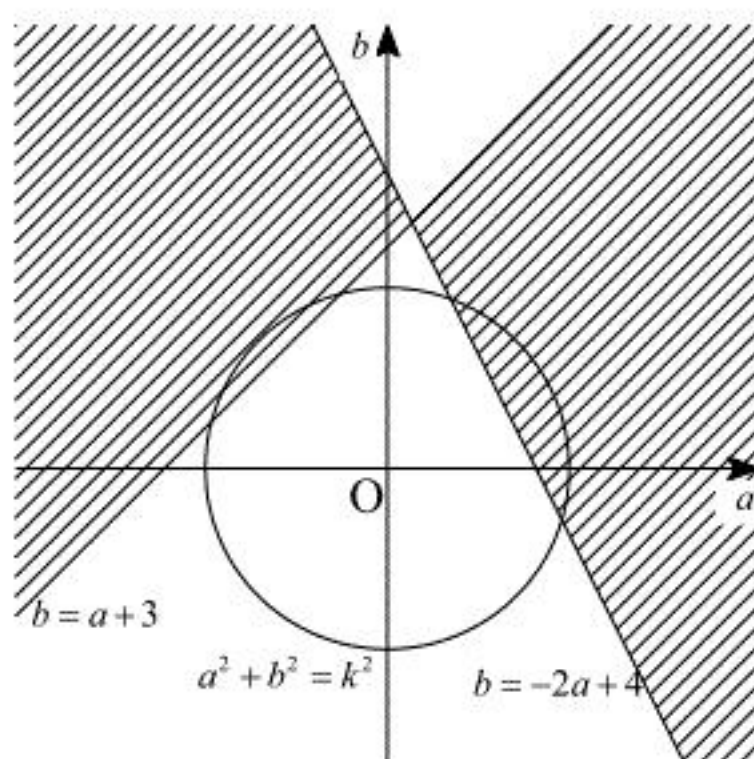
である。前者の条件を変形すると、

$$\begin{cases} 4 > 1 - a + b \\ 8 < 4 + 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < a + 3 \\ b > -2a + 4 \end{cases}$$

となり、同様に後者の条件を変形すると、

$$\begin{cases} b > a + 3 \\ b < -2a + 4 \end{cases}$$

となるから、これらの関係を ab 平面に図示すると以下の斜線部のようになる。ただし、境界を含まない。



(答) $-2a + 4 < b < a + 3$ または $a + 3 < b < -2a + 4$, 前図

問 2

k を正の定数として $a^2 + b^2 = k^2$ とおくと、 k は ab 平面上の原点を中心とする円の半径を表す。ここで、原点と 2 直線 $b = a + 3$, $b = -2a + 4$ との距離をそれぞれ l_1, l_2 とすると、

$$l_1 = \frac{|3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$l_2 = \frac{|4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

である。ここで、 $l_1^2 = \frac{9}{2}$, $l_2^2 = \frac{16}{5}$ より、 $l_1^2 > l_2^2$ であるから、 $l_1 > 0, l_2 > 0$ より、

$$l_1 > l_2$$

である。よって、円 $a^2 + b^2 = k^2$ が問 1 で求めた領域と共有点を持つ条件は、

$$k > l_2$$

であるから、求める $a^2 + b^2$ の取りうる値の範囲は、

$$a^2 + b^2 > \frac{16}{5}$$

である。

(答) $a^2 + b^2 > \frac{16}{5}$

すべての自然数 n に対し、与えられた等式が成り立つことを数学的帰納法により示す。

[1] $n=1$ のとき

$$(\text{左辺}) = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1) = 1$$

$$(\text{右辺}) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1) = 1$$

であるから、与えられた等式は成り立つ。

[2] $n=l$ のとき

与えられた等式が成り立つと仮定すると、

$$1 \cdot (2l-1) + 2 \cdot (2l-3) + \cdots + (l-1) \cdot 3 + l \cdot 1 = \frac{l(l+1)(2l+1)}{6}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \{2(l+1)-1\} + 2 \cdot \{2(l+1)-3\} + \cdots + \{(l+1)-2\} \cdot 5 + \{(l+1)-1\} \cdot 3 + (l+1) \cdot 1 \\ &= \{1 \cdot (2l-1) + 2 \cdot (2l-3) + \cdots + (l-1) \cdot 3 + l \cdot 1\} + \{1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + \cdots + (l-1) \cdot 2 + l \cdot 2\} + (l+1) \cdot 1 \\ &= \frac{l(l+1)(2l+1)}{6} + 2 \cdot \frac{1}{2} l(l+1) + (l+1) \\ &= \frac{(l+1)(l+2)(2l+3)}{6} \\ &= \frac{(l+1)\{(l+1)+1\}\{2(l+1)+1\}}{6} \end{aligned}$$

と変形できるから、 $n=l+1$ のときも与えられた等式は成り立つ。

以上[1], [2]より、すべての自然数 n に対して、与えられた等式は成り立つことが示された。

(証明終)

問 1

原点を除いた円 C 上の点 P について、座標を (s, t) とおく。

$(s, t) \neq (0, 1)$ のとき、 $s \neq 0$ かつ $t \neq 0$ である。このとき、直線 OP の方程式は

$$y = \frac{t}{s}x \quad (\because s > 0)$$

であるから、点 Q の x 座標は

$$1 = \frac{t}{s}x \Leftrightarrow x = \frac{s}{t} \quad (\because t \neq 0)$$

であり、点 R の座標は $\left(\frac{s}{t}, t\right)$ となる。ここで、円 C の方程式は

$$s^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

であるから、この式の両辺を t^2 で割り、 $\left(\frac{s}{t}, t\right) = (x, y)$ とすると、軌跡の方程式は

$$\begin{aligned} \left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2t}\right)^2 &= \frac{1}{4t^2} \\ \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2 \cdot \frac{1}{2y} + \frac{1}{4y^2} &= \frac{1}{4y^2} \quad (\because t = y \neq 0) \\ \Leftrightarrow x^2 + 1 - \frac{1}{y} &= 0 \\ \therefore y &= \frac{1}{x^2 + 1} \quad (x \neq 0) \end{aligned}$$

となる。一方、 $(s, t) = (0, 1)$ のとき、点 Q の座標は点 P に等しく $(0, 1)$ であるから、点 R の座標も $(0, 1)$ であり、これは先ほど求めた軌跡の方程式において $x = 0$ とした場合の点と等しい。したがって、求める軌跡の方程式は

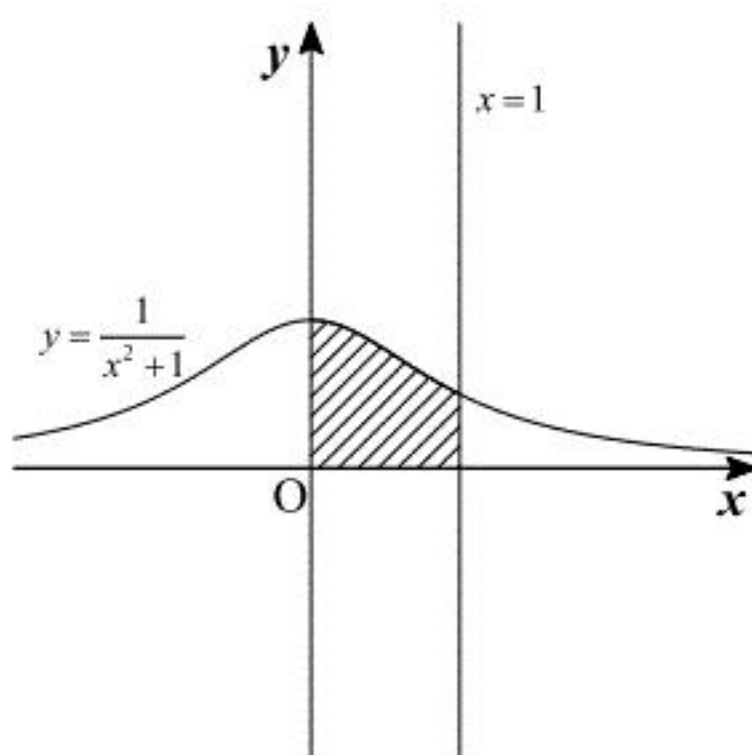
$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

問 2

曲線 $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ と x 軸および 2 直線 $x = 0, x = 1$ で囲まれた図形は以下の斜線部分である。



よって、求める面積は、

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

となる。ここで、 $x = \tan \theta$ と置換すると、 $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ であり、 x と θ は以下のように対応する。

x	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

したがって、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{4}$$

問 1

$\triangle OPQ$ において、余弦定理より

$$\begin{aligned} PQ^2 &= OP^2 + OQ^2 - 2OP \cdot OQ \cos \angle POQ \\ &= a^2 + b^2 - ab \end{aligned}$$

である。 $\triangle OQR$, $\triangle ORP$ においても同様に、余弦定理より

$$\begin{aligned} QR^2 &= b^2 \\ RP^2 &= a^2 + b^2 - ab \end{aligned}$$

となる。よって、 $\triangle PQR$ に余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} \cos \angle QPR &= \frac{PQ^2 + PR^2 - QR^2}{2PQ \cdot PR} \\ &= \frac{2a^2 + b^2 - 2ab}{2(a^2 + b^2 - ab)} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \cos \angle QPR = \frac{2a^2 + b^2 - 2ab}{2(a^2 + b^2 - ab)}$$

問 2

$b=2$ のとき、

$$\begin{aligned} \cos \angle QPR &= \frac{2a^2 + 4 - 4a}{2(a^2 + 4 - 2a)} \\ &= \frac{a^2 - 2a + 2}{a^2 - 2a + 4} \\ &= 1 - \frac{2}{(a-1)^2 + 3} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $0 < \angle QPR < \pi$ より、

$\angle QPR$ が最大 $\Leftrightarrow \cos \angle QPR$ が最小

$$\Leftrightarrow \frac{2}{(a-1)^2 + 3} \text{ が最大}$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + 3 \text{ が最小}$$

であり、 $(a-1)^2 + 3$ は $a=1$ のときに最小となるから、求める a の値は

$$a=1$$

である。

$$(\text{答}) \quad a=1$$

問 3

$a=1, b=2$ のとき、

$$PQ = PR = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2} = \sqrt{3}$$

$$\cos \angle QPR = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\sin \angle QPR = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

であるから、 $\triangle PQR$ の面積は、

$$\begin{aligned} \triangle PQR &= \frac{1}{2} PQ \cdot PR \cdot \sin \angle QPR \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \triangle PQR = \sqrt{2}$$

問 1

$$\begin{aligned} b_n &= a_{2n} \\ &= \frac{(-1)^{2n}}{2n(2n+2)} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{n}{4(n+1)} \end{aligned}$$

である。

(答) $\sum_{k=1}^n b_k = \frac{n}{4(n+1)}$

問 2

数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_{2n-1}$ で定めると、

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} a_k \\ &= \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n c_n \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} c_n &= a_{2n-1} \\ &= \frac{-1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_k &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - 1 \right) \\ &= -\frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^n b_k + \sum_{k=1}^n c_k \\ &= \frac{n}{4(n+1)} - \frac{n}{2n+1} \\ &= -\frac{n(2n+3)}{4(n+1)(2n+1)} \end{aligned}$$

である。

(答) $S_{2n} = -\frac{n(2n+3)}{4(n+1)(2n+1)}$

問 3

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n(2n+3)}{4(n+1)(2n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\left(2 + \frac{3}{n}\right)}{4\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{-2}{4 \cdot 1 \cdot 2} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = -\frac{1}{4}$

問 4

$$\begin{aligned} |S_{2n} - S| &= \left| -\frac{n(2n+3)}{4(n+1)(2n+1)} + \frac{1}{4} \right| \\ &= \left| \frac{(n+1)(2n+1) - n(2n+3)}{4(n+1)(2n+1)} \right| \\ &= \left| \frac{1}{4(n+1)(2n+1)} \right| \\ &= \frac{1}{4(n+1)(2n+1)} \quad (\because n \geq 1) \end{aligned}$$

である。よって、与えられた不等式は

$$\begin{aligned} |S_{2n} - S| &< 0.001 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4(n+1)(2n+1)} &< \frac{1}{1000} \\ \Leftrightarrow (n+1)(2n+1) &> 250 \end{aligned}$$

と変形でき、この不等式の左辺は $n \geq 1$ で単調に増加する。ここで、 $n=10$ のとき

$$(10+1)(2 \cdot 10+1) = 231 < 250$$

であり、 $n=11$ のとき

$$(11+1)(2 \cdot 11+1) = 276 > 250$$

であるから、与えられた不等式を満たす最小の自然数 n は 11 である。

(答) $n=11$

問 1

放物線 P 上の点を $A(X, Y)$ とおく。このとき、点 A と焦点 $(0, a)$ との距離は

$$\sqrt{(X-0)^2 + (Y-a)^2} = \sqrt{X^2 + (Y-a)^2}$$

である。一方、点 A と直線 $y=b$ との距離は

$$|Y-b|$$

である。これらの値が等しいことから、

$$\sqrt{X^2 + (Y-a)^2} = |Y-b|$$

であり、この式の両辺はともに正であるから、2乗して整理すると、

$$\begin{aligned} X^2 + (Y-a)^2 &= (Y-b)^2 \\ \Leftrightarrow X^2 - 2(a-b)Y + a^2 - b^2 &= 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、 X を x に、 Y を y に置き換えると、求める方程式は、

$$x^2 - 2(a-b)y + a^2 - b^2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2(a-b)}x^2 + \frac{a+b}{2} \quad (\because a-b > 0)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{1}{2(a-b)}x^2 + \frac{a+b}{2}$$

問 2

焦点 $(0, a)$ を中心とする半径 $a-b$ の円の方程式は、

$$x^2 + (y-a)^2 = (a-b)^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。これより、 $x^2 = (a-b)^2 - (y-a)^2$ であるから、 $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$\begin{aligned} (a-b)^2 - (y-a)^2 - 2(a-b)y + a^2 - b^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow -y^2 + 2by + a^2 - 2ab &= 0 \\ \Leftrightarrow (y-a)(y+a-2b) &= 0 \\ \therefore y &= a, -a+2b \end{aligned}$$

となる。

[1] $y=a$ のとき

②に $y=a$ を代入すると、

$$\begin{aligned} x^2 &= (a-b)^2 \\ \therefore x &= \pm(a-b) \end{aligned}$$

となる。

[2] $y=-a+2b$ のとき

②に $y=-a+2b$ を代入すると、

$$\begin{aligned} x^2 + (-2a+2b)^2 &= (a-b)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= -3(a-b)^2 \end{aligned}$$

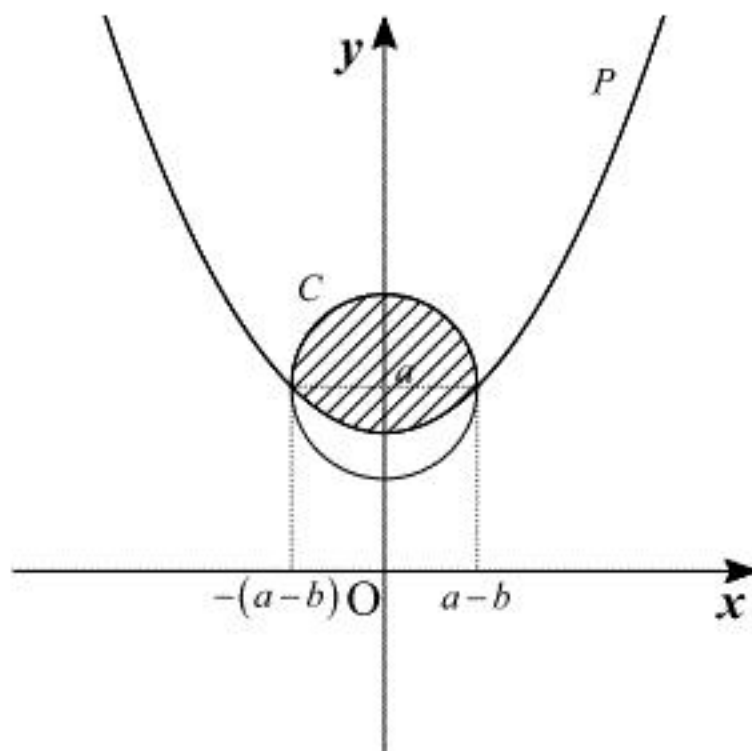
となるが、これを満たす実数 x は存在しない。

以上[1], [2]より、求める交点の座標は $(\pm(a-b), a)$ である。

$$(\text{答}) \quad (\pm(a-b), a)$$

問 3

円 C 、放物線 P 、および面積を求める領域を図示すると、以下のようになる。



斜線部分を直線 $y=a$ の上下に分けて考えると、上側は半径 $a-b$ の半円であり、下側は直線 $y=a$ と放物線 P に囲まれた領域である。したがって、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{2}(a-b)^2 + \int_{-(a-b)}^{a-b} \left\{ a - \frac{1}{2(a-b)}x^2 - \frac{a+b}{2} \right\} dx \\ &= \frac{\pi}{2}(a-b)^2 - \frac{1}{2(a-b)} \int_{-(a-b)}^{a-b} \{x-(a-b)\} \{x+(a-b)\} dx \\ &= \frac{\pi}{2}(a-b)^2 - \frac{1}{2(a-b)} \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) \{2(a-b)\}^3 \\ &= \frac{\pi}{2}(a-b)^2 + \frac{2}{3}(a-b)^2 \\ &= \frac{(3\pi+4)(a-b)^2}{6} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{(3\pi+4)(a-b)^2}{6}$$