

平成 27 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 志望する受験区分に応じて、次の指示に従って解答しなさい。
(指定外の問題に解答した場合には採点されません。)
 - ・ 数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻の受験者は
[5], [6], [7], [8], [9]に必答すること。
 - ・ 教育科学専攻(中等)・理科選修・理科専攻・自然科学コースの受験者は
[3], [4], [5]に必答すること。
 - ・ 技術専攻・情報科学コースの受験者は
[3], [4]に必答し、
[5], [6]のうちから 1 題を選択し解答すること。
 - ・ 教育科学選修(初等)の受験者および音楽選修・音楽専攻・美術選修・美術専攻・保健体育選修・保健体育専攻・家庭選修・家庭専攻・特別支援学校教員養成課程・養護教諭養成課程の受験者は
[1], [2]に必答すること。
3. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

解答上の注意

必答問題については、問題番号の印刷してある解答用紙に解答しなさい。

選択問題については、問題番号の印刷していない解答用紙に、選択した問題の番号を記入してから解答しなさい。

◎印は必答問題、○印は選択問題を示す。

- 1 (教育科学選修(初等)・音楽選修・音楽専攻・美術選修・美術専攻・保健体育選修・保健体育専攻・家庭選修・家庭専攻・特別支援学校教員養成課程・養護教諭養成課程◎)

関数

$$y = (\cos x - \sin x + 1) \sin 2x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

を考える。次の問いに答えよ。

問1 $t = \cos x - \sin x$ とおくとき、 t がとり得る値の範囲を求めよ。

問2 y を t を用いて表せ。

問3 y の最大値・最小値と、そのときの t の値をそれぞれ求めよ。

2 (教育科学選修(初等)・音楽選修・音楽専攻・美術選修・美術専攻・保健体育選修・保健体育専攻・家庭選修・家庭専攻・特別支援学校教員養成課程・養護教諭養成課程◎)

円 C 上に異なる 2 点 P, Q をとり、点 P における C の接線 l と点 Q における C の接線 m が交わっているとする。 l と m の交点を R とし、 R とは異なる m 上の点 S を $QR = QS$ を満たすように定める。また、2 点 P, S を通る直線と円 C との交点で P とは異なる点を T とする。さらに、 Q を中心に T を 180° 回転した点を T' とする。

問 1 4 点 P, Q, T', R が同一円周上にあることを示せ。

問 2 $QP = \sqrt{10}$, $PR = \sqrt{5}$, $RT' = 1$, $T'Q = \sqrt{2}$ のとき、 $\angle QPR$ の大きさを求めよ。
さらに、四角形 $PQT'R$ の面積を求めよ。

3 (教育科学専攻(中等)・理科選修・理科専攻・自然科学コース◎, 技術専攻・情報科学コース◎)

xy 平面上の曲線 $C_1: y = x^2$ を考える。 C_1 上に異なる 2 点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ をとり、点 A における C_1 の接線と点 B における C_1 の接線の交点を P とする。ただし、 $a < b$ とする。以下の問いに答えよ。

問1 点 P の座標を a, b を用いて表せ。

問2 $\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PB}$ の内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ を a, b を用いて表せ。

問3 問1で求めた点 P が、 xy 平面上の曲線 $C_2: y = x^2 - x$ ($0 < x < 1$) 上にあるとする。このとき、問1で求めた点 P の x 座標を s とおき、問2で求めた内積を s で表せ。

問4 内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ を最大にする C_2 上の点 P の座標を求めよ。

4 (教育科学専攻(中等)・理科選修・理科専攻・自然科学コース◎, 技術専攻・情報科学コース◎)

放物線 $y = x^2 + ax + b$ により, xy 平面を 2 つの領域に分割する。以下の問いに答えよ。

問1 点 $(-1, 4)$ と点 $(2, 8)$ が放物線上にはなく別々の領域に属するような a, b の条件を求めよ。さらに, その条件を満たす (a, b) の領域を ab 平面に図示せよ。

問2 a, b が問1で求めた条件を満たすとき, $a^2 + b^2$ がとり得る値の範囲を求めよ。

- 5 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎，教育科学専攻(中等)・理科選修・理科専攻・自然科学コース◎，技術専攻・情報科学コース○)

n を自然数とするととき，等式

$$1 \cdot (2n - 1) + 2 \cdot (2n - 3) + 3 \cdot (2n - 5) + \cdots + (n - 1) \cdot 3 + n \cdot 1 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

が成り立つことを，数学的帰納法により証明せよ。

6 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎, 技術専攻・情報科学コース○)

xy 平面において, 点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円を C とする。円 C 上に原点 O とは異なる点 P を取り, 直線 OP と直線 $y = 1$ の交点を Q とする。また, x 座標が Q と同じで, y 座標が P と同じである点を R とする。

問1 点 P が円 C 上の原点 O とは異なる点全体を動くとき, 点 R の軌跡の方程式を求めよ。

問2 問1 で求めた曲線と x 軸および2直線 $x = 0$, $x = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

7 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎)

1 辺の長さが 4 の正四面体 $OABC$ がある。点 P , Q , R をそれぞれ辺 OA , OB , OC 上の点とし, OP , OQ , OR の長さをそれぞれ a , b , b (ただし, $0 < a < 4$, $0 < b < 4$) とする。

問 1 $\cos \angle QPR$ を a , b を用いて表せ。

問 2 $b = 2$ とし, 点 P は $\angle QPR$ の大きさを最大にする点とする。このとき, a の値を求めよ。

問 3 問 2 の条件のもとで, $\triangle PQR$ の面積を求めよ。

8 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎)

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n(n+2)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

問1 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{2n}$ で定めるとき、 $\sum_{k=1}^n b_k$ を求めよ。

問2 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $2n$ 項までの和 S_{2n} を求めよ。

問3 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ を求めよ。

問4 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ とおくとき、 $|S_{2n} - S| < 0.001$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

9 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎)

a, b を実数とし, $b < a$ とする。焦点が $(0, a)$, 準線が $y = b$ である放物線を P で表すことにする。すなわち, P は点 $(0, a)$ からの距離と直線 $y = b$ からの距離が等しい点の軌跡である。

問1 放物線 P の方程式を求めよ。

問2 焦点 $(0, a)$ を中心とする半径 $a - b$ の円を C とする。このとき, 円 C と放物線 P の交点を求めよ。

問3 円 C と放物線 P で囲まれた図形のうち, 放物線 P の上側にある部分の面積を求めよ。

