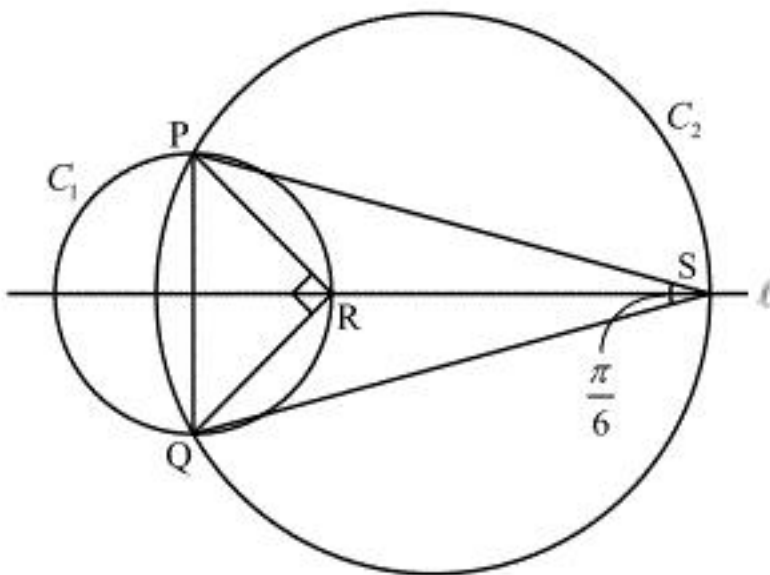


1

問 1

$\angle \text{PRQ} = \frac{\pi}{2}$, $\angle \text{PSQ} = \frac{\pi}{6}$ のとき, C_1 と C_2 は以下のようになっている。



三角形 PQR は円 C_1 に内接する三角形であるから, 三角形 PQR に関する正弦定理より,

$$\frac{\text{PQ}}{\sin \angle \text{PRQ}} = 2r_1$$

$$\therefore \text{PQ} = 2r_1 \left(\because \angle \text{PRQ} = \frac{\pi}{2} \right) \quad \dots \textcircled{1}$$

を得る。同様に, 三角形 PQS は円 C_2 に内接する三角形であるから, 三角形 PQS に関する正弦定理より,

$$\frac{\text{PQ}}{\sin \angle \text{PSQ}} = 2r_2$$

$$\therefore \text{PQ} = r_2 \left(\because \angle \text{PSQ} = \frac{\pi}{6} \right) \quad \dots \textcircled{2}$$

を得る。以上①, ②より,

$$2r_1 = r_2$$

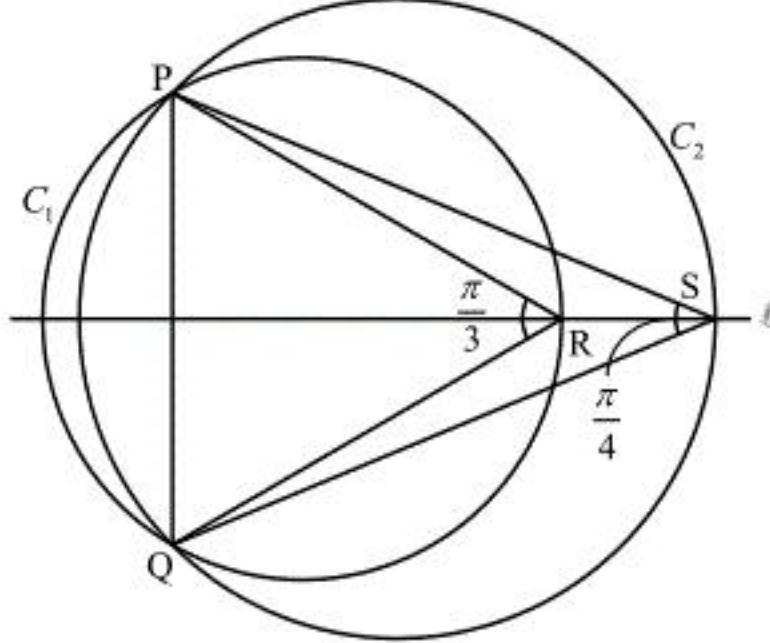
$$\therefore \frac{r_2}{r_1} = 2$$

と求まる。

(答) $\frac{r_2}{r_1} = 2$

問 2

$\angle \text{PRQ} = \frac{\pi}{3}$, $\angle \text{PSQ} = \frac{\pi}{4}$ のとき, C_1 と C_2 は以下のようになる。



三角形 PQR は円 C_1 に内接する三角形であるから, 三角形 PQR に関する正弦定理より,

$$\frac{\text{PQ}}{\sin \angle \text{PRQ}} = 2r_1$$

$$\therefore \text{PQ} = \sqrt{3}r_1 \left(\because \angle \text{PRQ} = \frac{\pi}{3} \right) \quad \dots \textcircled{3}$$

を得る。同様に, 三角形 PQS は円 C_2 に内接する三角形であるから, 三角形 PQS に関する正弦定理より,

$$\frac{\text{PQ}}{\sin \angle \text{PSQ}} = 2r_2$$

$$\therefore \text{PQ} = \sqrt{2}r_2 \left(\because \angle \text{PSQ} = \frac{\pi}{4} \right) \quad \dots \textcircled{4}$$

を得る。以上③, ④より,

$$\sqrt{3}r_1 = \sqrt{2}r_2$$

$$\therefore \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

と求まる。

(答) $\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

問 3

問 1, 問 2 と同様に, 三角形 PQR は円 C_1 に内接する三角形であるから, 三角形 PQR に関する正弦定理より,

$$\frac{\text{PQ}}{\sin \angle \text{PRQ}} = 2r_1$$

$$\therefore \text{PQ} = 2r_1 \sin \theta_1 \left(\because \angle \text{PRQ} = \theta_1 \right) \quad \dots \textcircled{5}$$

を得る。同様に, 三角形 PQS は円 C_2 に内接する三角形であるから, 三角形 PQS に関する正弦定理より,

$$\frac{\text{PQ}}{\sin \angle \text{PSQ}} = 2r_2$$

$$\therefore \text{PQ} = 2r_2 \sin \theta_2 \left(\because \angle \text{PSQ} = \theta_2 \right) \quad \dots \textcircled{6}$$

を得る。 θ_2 は三角形の内角の大きさであるから,

$$0 < \theta_2 < \pi$$

であることに注意すると, ⑤, ⑥より,

$$2r_1 \sin \theta_1 = 2r_2 \sin \theta_2$$

$$\therefore \frac{r_2}{r_1} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \left(\because 0 < \theta_2 < \pi \right)$$

と求まる。

すべての自然数 n について,

$$3^n - 2n + 3 \text{ は } 4 \text{ の倍数である} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つことを、数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

このとき,

$$3^n - 2n + 3 = 3^1 - 2 \cdot 1 + 3 = 4$$

となるから、 $\textcircled{1}$ は確かに成り立つ。

[2] $n=k$ において $\textcircled{1}$ が成り立つことを仮定するとき

このとき、仮定より,

$$3^k - 2k + 3 = 4m$$

を満たすような整数 m が存在する。 $n=k+1$ の場合を考えると,

$$\begin{aligned} 3^{k+1} - 2(k+1) + 3 &= 3(3^k - 2k + 3) + 4k - 8 \\ &= 3 \cdot 4m + 4(k-2) \\ &= (3m + k - 2) \cdot 4 \end{aligned}$$

となるが、 m, k が整数であることから、 $3m + k - 2$ も整数である。したがって、

$3^{k+1} - 2(k+1) + 3$ は 4 の倍数である。以上より、 $n=k+1$ においても $\textcircled{1}$ は成り立つ。

以上[1], [2]より、すべての自然数 n について $\textcircled{1}$ が成り立つことが示された。

問 1

与えられた等式 $xy^2 = a^3$ の両辺に a を底とする対数をとることで、

$$\begin{aligned}\log_a xy^2 &= \log_a a^3 \\ \Leftrightarrow \log_a x + 2\log_a y &= 3\log_a a \\ \therefore X + 2Y &= 3\end{aligned}$$

が成り立つ。

(答) $X + 2Y = 3$

問 2

$0 < a < 1, x > 0, y > 0$ より、 X, Y は任意の実数値をとる。 x, y が $\log_a x \cdot \log_a y \geq 1$ を満たすということは、 $XY \geq 1$ が成り立つということであるから、これと問 1 の結果より、

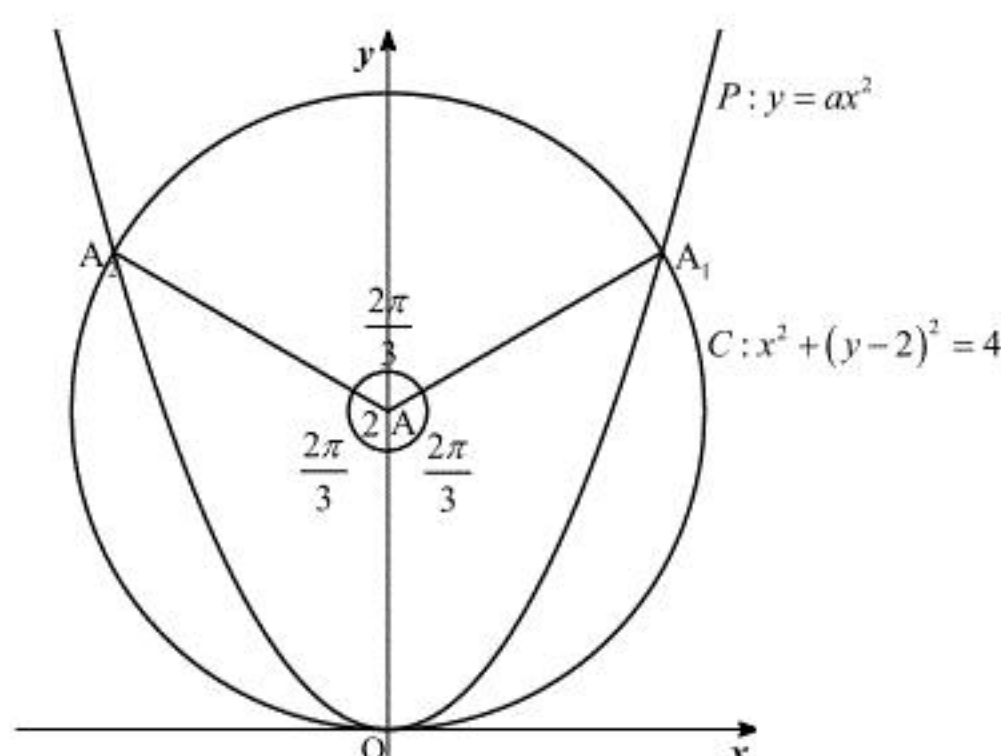
$$\begin{aligned}XY &\geq 1 \\ \Leftrightarrow (3 - 2Y)Y &\geq 1 \quad (\because X + 2Y = 3) \\ \Leftrightarrow 2Y^2 - 3Y + 1 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (Y - 1)(2Y - 1) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &\leq Y \leq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &\leq \log_a y \leq 1 \\ \therefore a &\leq y \leq \sqrt{a} \quad (\because 0 < a < 1)\end{aligned}$$

を得る。これが求める y の範囲である。

(答) $a \leq y \leq \sqrt{a}$

問 1

以下の図のように、点 A を $A(0, 2)$ とおく。円 C と放物線 P は原点 O を通り、 O 以外の共有点を点 A_1, A_2 とおく。



3 点 O, A_1, A_2 が円 C の円周の長さを 3 等分するとき、対称性より、

$$\angle OAA_1 = \frac{2\pi}{3}$$

を得る。これと $AO = AA_1 = 2$ より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_1} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA_1} \\ &= (0, 2) + \left(2\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right), 2\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= (\sqrt{3}, 3)\end{aligned}$$

が成り立つから、点 A_1 の座標は、

$$A_1(\sqrt{3}, 3)$$

となる。放物線 P が点 A_1 を通ることから、

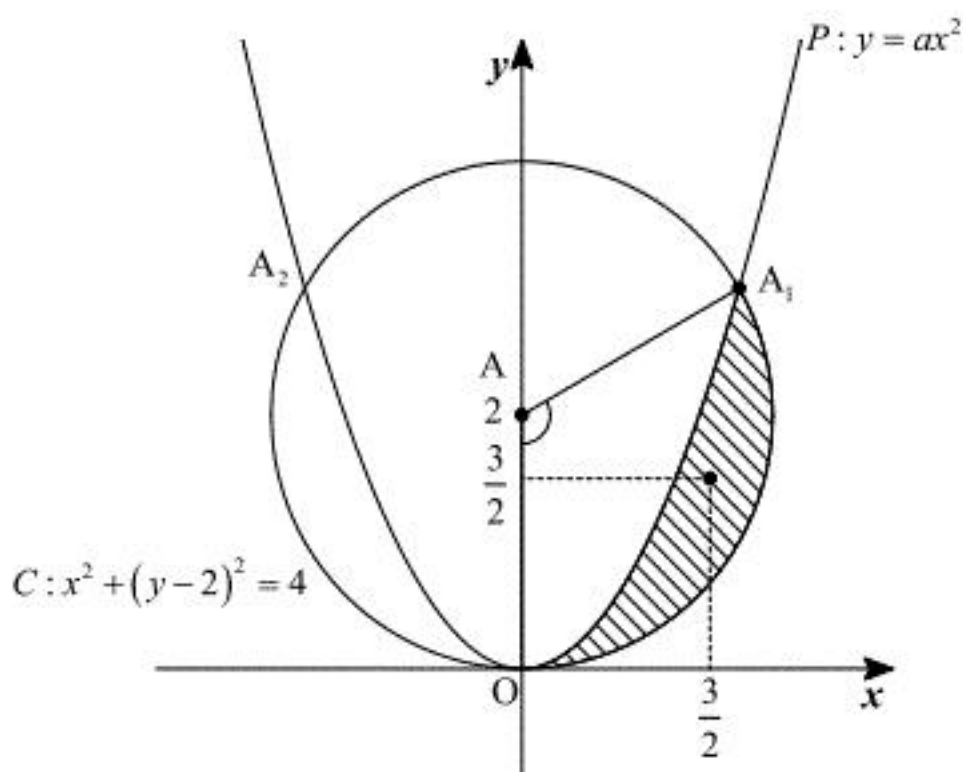
$$\begin{aligned}3 &= a(\sqrt{3})^2 \\ \therefore a &= 1\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $a=1$

問 2

求める面積は、以下の図の斜線部の面積である。



求める面積を S ，扇形 AOA_1 の面積を S_1 ，線分 OA, AA_1 および放物線 P で囲まれた部分の面積を S_2 とおくと、図より、

$$S = S_1 - S_2$$

となる。ここで、

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

であり、また、 A_1 から x 軸に下ろした垂線の足を H とすると、

$$\begin{aligned}S_2 &= \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{HA_1}) \cdot \overline{OH} - \int_0^{\sqrt{3}} x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2+3) \cdot \sqrt{3} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

と計算できる。以上より、

$$\begin{aligned}S &= S_1 - S_2 \\ &= \frac{4}{3}\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{4}{3}\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

すべての自然数 n について、

$$\left[3^{3n+1} + 7^{2n-1} \text{ は } 11 \text{ の倍数である} \right] \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを、数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

このとき、

$$\begin{aligned} 3^{3n+1} + 7^{2n-1} &= 3^{3 \cdot 1 + 1} + 7^{2 \cdot 1 - 1} \\ &= 88 \\ &= 8 \cdot 11 \end{aligned}$$

となるから、 $\textcircled{1}$ は確かに成り立つ。

[2] $n=k$ において $\textcircled{1}$ が成り立つことを仮定するとき

このとき、仮定より、

$$3^{3k+1} + 7^{2k-1} = 11m$$

を満たすような整数 m が存在する。 $n=k+1$ の場合を考えると、

$$\begin{aligned} 3^{3(k+1)+1} + 7^{2(k+1)-1} &= 3^3 \cdot 3^{3k+1} + 7^2 \cdot 7^{2k-1} \\ &= 3^3 (3^{3k+1} + 7^{2k-1}) + (7^2 - 3^3) 7^{2k-1} \\ &= 3^3 \cdot 11m + 22 \cdot 7^{2k-1} \\ &= (3^3 m + 2 \cdot 7^{2k-1}) \cdot 11 \end{aligned}$$

となるが、 m, k が整数であることから、 $3^3 m + 2 \cdot 7^{2k-1}$ も整数である。したがって、

$3^{3(k+1)+1} + 7^{2(k+1)-1}$ は11の倍数である。以上より、 $n=k+1$ においても $\textcircled{1}$ は成り立つ。

以上[1], [2]より、すべての自然数 n について $\textcircled{1}$ が成り立つことが示された。

(証明終)

問 1

複素数平面上の点 A, B, P をそれぞれ $A(-1)$, $B(1)$, $P(z)$ と定めると、与えられた方程式より、

$$\begin{aligned} |z+1| &= |z-1| \\ \therefore PA &= PB \end{aligned}$$

を得る。したがって、方程式 $|z+1|=|z-1|$ を満たす点 z 全体は、線分 AB の垂直二等分線、すなわち虚軸であることが分かる。

(答) 虚軸

問 2

複素数 z ($z \neq 1$) に対し、 $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$ としたとき、どんな z に対しても $w = -i$ とならないこと

を、背理法を用いて示す。 $w = -i$ となるような複素数 z ($z \neq -1$) の存在を仮定すると、

$$\begin{aligned} \frac{i(1-z)}{1+z} &= -i \\ \Leftrightarrow 1-z &= -(1+z) \\ \therefore 1 &= -1 \end{aligned}$$

となるが、これは明らかに矛盾である。したがって、どんな z に対しても $w = -i$ とはならないことが背理法により示された。

(証明終)

問 3

w の定義より、

$$\begin{aligned} w &= \frac{i(1-z)}{1+z} \\ \Leftrightarrow \frac{1-z}{1+z} &= \frac{w}{i} \\ \Leftrightarrow i(1-z) &= w(1+z) \quad (\because z \neq -1) \\ \Leftrightarrow z(w+i) &= -(w-i) \\ \Leftrightarrow z &= -\frac{w-i}{w+i} \quad (\because w \neq -i) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つ。 z が満たす方程式から、

$$\begin{aligned} |z+1| &= |z-1| \\ \Leftrightarrow |z+1|^2 &= |z-1|^2 \\ \Leftrightarrow (z+1)(\overline{z+1}) &= (z-1)(\overline{z-1}) \\ \Leftrightarrow (z+1)(\overline{z}+1) &= (z-1)(\overline{z}-1) \\ \Leftrightarrow z+\overline{z} &= 0 \end{aligned}$$

を得る。これに①を代入すると、

$$\begin{aligned} z+\overline{z} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{w-i}{w+i} - \overline{\left(-\frac{w-i}{w+i}\right)} &= 0 \\ \Leftrightarrow (w-i)(\overline{w+i}) + (\overline{w-i})(w+i) &= 0 \text{ かつ } w \neq -i \\ \Leftrightarrow (w-i)(\overline{w}-i) + (\overline{w}+i)(w+i) &= 0 \text{ かつ } w \neq -i \\ \Leftrightarrow 2w\overline{w}-2 &= 0 \text{ かつ } w \neq -i \\ \Leftrightarrow |w|^2 &= 1 \text{ かつ } w \neq -i \\ \therefore |w| &= 1 \text{ かつ } w \neq -i \end{aligned}$$

となる。したがって、点 z が問 1 で求めた図形の上を動くとき、問 2 の点 w は、原点を中心とする半径 1 の円周上のうち点 $-i$ を除いた部分を動くことが分かる。

(答) 原点を中心とする半径 1 の円周上 (点 $-i$ を除く)

問 1

三角形 ABC は点 O を中心とする半径 1 の円に内接する三角形であるから、

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$$

が成り立つ。与式を変形することで、

$$\begin{aligned} 5\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 5\overrightarrow{OA} &= -\left(4\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}\right) \end{aligned}$$

を得るから、この両辺の大きさを 2 乗することで、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{5OA}|^2 &= \left| -\left(4\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}\right) \right|^2 \\ \Leftrightarrow 5^2 |\overrightarrow{OA}|^2 &= 4^2 |\overrightarrow{OB}|^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 3^2 |\overrightarrow{OC}|^2 \\ \Leftrightarrow 5^2 \cdot 1^2 &= 4^2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 4 \cdot 3 \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 3^2 \cdot 1^2 \left(\because |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1 \right) \\ \therefore \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= 0 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$$

問 2

問 1 の結果より、三角形 OBC は $\angle BOC = 90^\circ$ の直角三角形である。したがって、三平方の定理より、

$$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{2} \left(\because |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1 \right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad BC = \sqrt{2}$$

問 3

与式を変形することで、

$$\begin{aligned} 5\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} &= -\frac{1}{5} \left(4\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} \right) \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} &= -\frac{7}{5} \cdot \frac{4\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}}{7} \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、線分 BC を 3:4 に内分する点を点 N とおくと、

$$\overrightarrow{ON} = \frac{4\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}}{7}$$

と表すことができるから、

$$\overrightarrow{OA} = -\frac{7}{5} \overrightarrow{ON}$$

と表せる。したがって、点 N は直線 OA 上に存在し、かつ線分 BC 上に存在する点であるから、点 N は点 M と一致する。よって、

$$\begin{aligned} BM : MC &= 3 : 4 \\ \therefore BM &= \frac{3\sqrt{2}}{7} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad BM = \frac{3\sqrt{2}}{7}$$

問 4

問 3 より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= -\frac{7}{5} \overrightarrow{OM} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} &= -\frac{5}{7} \overrightarrow{OA} \\ \therefore |\overrightarrow{OM}| &= \left| -\frac{5}{7} \overrightarrow{OA} \right| = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

が成り立つ。 $OB = 1$, $BM = \frac{3\sqrt{2}}{7}$ であるから、三角形 OBM に関して余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos \angle BOM &= \frac{OB^2 + OM^2 - BM^2}{2OB \cdot OM} \\ &= \frac{1^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{7}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot \frac{5}{7}} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \cos \angle BOM = \frac{4}{5}$$

問 1

$0 < x < 1$ より, $y > 0$ である。与えられた関数の両辺の自然対数をとると,

$$\log y = x \log x + (1-x) \log (1-x)$$

となる。この両辺を x で微分して, y の導関数 y' は,

$$\frac{y'}{y} = \log x + 1 - \log (1-x) - 1$$

$$\therefore y' = x^x (1-x)^{1-x} \log \frac{x}{1-x} \left(\because y = x^x (1-x)^{1-x} \right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad y' = x^x (1-x)^{1-x} \log \frac{x}{1-x}$$

問 2

$0 < x < 1$ のとき, $y > 0$ であり,

$$y' = y \log \frac{x}{1-x}$$

であるから,

$$y' = 0$$

$$\Leftrightarrow \log \frac{x}{1-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1-x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

が成り立つ。したがって, $0 < x < 1$ における y の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
y'		-	0	+	
y		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

増減表より, y は $x = \frac{1}{2}$ で最小値をとることが分かり, その値は,

$$y = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

である。また, $\lim_{t \rightarrow +0} t' = 1$ より,

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \lim_{x \rightarrow +0} x^x (1-x)^{1-x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 1-0} x^x (1-x)^{1-x} = 1$$

と計算できる。以上より, y のとり得る値の範囲は,

$$\frac{1}{2} \leq y < 1$$

と分かる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} \leq y < 1$$

問 1

積分定数を C とすると、与えられた不定積分はそれぞれ、

$$\begin{aligned}\int \sin^2 t dt &= \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + C \\ \int \sin t \cos t dt &= \int \frac{\sin 2t}{2} dt = -\frac{\cos 2t}{4} + C \\ \int \cos^2 t dt &= \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} \int \sin^2 t dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + C \\ \int \sin t \cos t dt = -\frac{\cos 2t}{4} + C \\ \int \cos^2 t dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + C \end{cases} \quad (C : \text{積分定数})$$

問 2

三角関数の加法定理より、

$$\cos(t-x) = \cos t \cos x + \sin t \sin x$$

が成り立つから、与えられた等式は、

$$\begin{aligned}f(x) &= \cos x + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(t-x) dt \\ \Leftrightarrow f(x) &= \cos x + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) (\cos t \cos x + \sin t \sin x) dt \\ \Leftrightarrow f(x) &= \cos x + \frac{\cos x}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos t dt + \frac{\sin x}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin t dt \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、

$$\begin{aligned}A &= 1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos t dt \\ B &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin t dt\end{aligned}$$

とおくと、 $\textcircled{1}$ 式は、

$$f(x) = A \cos x + B \sin x$$

と表せる。問 1 の結果を用いると、

$$\begin{aligned}A - 1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos t dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (A \cos t + B \sin t) \cos t dt \\ &= \frac{A}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 t dt + \frac{B}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cos t dt \\ &= \frac{A}{\pi} \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^\pi + \frac{B}{\pi} \left[-\frac{\cos 2t}{4} \right]_0^\pi \\ &= \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{B}{\pi} \cdot 0 \\ &= \frac{A}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore A = 2$$

$$\begin{aligned}B &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin t dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (A \cos t + B \sin t) \sin t dt \\ &= \frac{A}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cos t dt + \frac{B}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 t dt \\ &= \frac{A}{\pi} \left[-\frac{\cos 2t}{4} \right]_0^\pi + \frac{B}{\pi} \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^\pi \\ &= \frac{A}{\pi} \cdot 0 + \frac{B}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{B}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore B = 0$$

を得る。以上より、与えられた等式を満たす $f(x)$ は、

$$f(x) = 2 \cos x$$

と分かる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = 2 \cos x$$