

平成28年度入学試験問題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 志望する受験区分に応じて、次の指示に従って解答しなさい。
(指定外の問題に解答した場合には採点されません。)
 - ・ 数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻の受験者は
[5], [6], [7], [8], [9]に必答すること。
 - ・ 教育科学専攻(中等)・理科選修・理科専攻・自然科学コースの受験者は
[3], [4], [5]に必答すること。
 - ・ 技術専攻・情報科学コースの受験者は
[3], [4]に必答し、
[5], [6]のうちから1題を選択し解答すること。
 - ・ 教育科学選修(初等)の受験者および音楽選修・音楽専攻・美術選修・美術専攻・保健体育選修・保健体育専攻・家庭選修・家庭専攻・特別支援学校教員養成課程・養護教諭養成課程の受験者は
[1], [2]に必答すること。
3. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

解答上の注意

必答問題については、問題番号の印刷してある解答用紙に解答しなさい。

選択問題については、問題番号の印刷していない解答用紙に、選択した問題の番号を記入してから解答しなさい。

◎印は必答問題，○印は選択問題を示す。

- 1 (教育科学選修(初等)・音楽選修・音楽専攻・美術選修・美術専攻・保健体育選修・保健体育専攻・家庭選修・家庭専攻・特別支援学校教員養成課程・養護教諭養成課程◎)

平面上で、半径 r_1 の円 C_1 と半径 r_2 の円 C_2 が、異なる 2 点 P, Q で交わっているとす
る。線分 PQ の垂直二等分線を ℓ として、円 C_1 と ℓ の交点のうち円 C_2 の内部にある点
を R, 円 C_2 と ℓ の交点のうち円 C_1 の外部にある点を S とする。

問 1 $\angle PRQ = \frac{\pi}{2}$, $\angle PSQ = \frac{\pi}{6}$ のとき, $\frac{r_2}{r_1}$ を求めよ。

問 2 $\angle PRQ = \frac{\pi}{3}$, $\angle PSQ = \frac{\pi}{4}$ のとき, $\frac{r_2}{r_1}$ を求めよ。

問 3 $\angle PRQ = \theta_1$, $\angle PSQ = \theta_2$ とするとき, $\frac{r_2}{r_1}$ を θ_1 と θ_2 を用いて表せ。

- 2 (教育科学選修(初等)・音楽選修・音楽専攻・美術選修・美術専攻・保健体育選修・保健体育専攻・家庭選修・家庭専攻・特別支援学校教員養成課程・養護教諭養成課程◎)

すべての自然数 n について、 $3^n - 2n + 3$ は 4 の倍数である。このことを、数学的帰納法を用いて示せ。

3 (教育科学専攻(中等)・理科選修・理科専攻・自然科学コース◎, 技術専攻・情報科学コース◎)

a を $0 < a < 1$ を満たす定数とし, x, y が $xy^2 = a^3$ を満たすとする。 $x > 0, y > 0$ とするとき, 次の問いに答えよ。

問1 $X = \log_a x, Y = \log_a y$ とおくとき, X と Y の関係式を求めよ。

問2 x, y が $\log_a x \cdot \log_a y \geq 1$ を満たすとき, y のとり得る値の範囲を求めよ。

- 4 (教育科学専攻(中等)・理科選修・理科専攻・自然科学コース◎, 技術専攻・情報科学コース◎)

xy 平面において, 点 $(0, 2)$ を中心とする半径 2 の円を C とする。また, 放物線 $y = ax^2$ を P とする。ただし, a は正の実数とする。

問 1 円 C と放物線 P との共有点が円 C の円周の長さを 3 等分するとき, a の値を求めよ。

問 2 a の値を問 1 で求めたものとする。このとき, 円 C と放物線 P により囲まれてできる図形のうち, 点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ を内部に含む図形の面積を求めよ。

- 5 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎，教育科学専攻(中等)・理科選修・理科専攻・自然科学コース◎，技術専攻・情報科学コース○)

すべての自然数 n について， $3^{3n+1} + 7^{2n-1}$ は 11 の倍数である。このことを，数学的帰納法を用いて示せ。

6 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎, 技術専攻・情報科学コース○)

問1 複素数平面において, 方程式 $|z+1| = |z-1|$ を満たす点 z 全体はどのような図形か答えよ。

問2 複素数 $z (z \neq -1)$ に対し, $w = \frac{i(1-z)}{1+z}$ とする。このとき, どんな z に対しても $w = -i$ とはならないことを示せ。ただし, i は虚数単位を表す。

問3 点 z が問1で求めた図形の上を動くとき, 問2の点 w はどのような図形を描くか答えよ。

7 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎)

点 O を中心とする半径 1 の円に内接する鋭角三角形 ABC において、辺 BC と直線 AO との交点を M とする。 $5\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ が成り立っているとき、次の問いに答えよ。

問1 内積 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$ を求めよ。

問2 BC の長さを求めよ。

問3 BM の長さを求めよ。

問4 $\cos \angle BOM$ を求めよ。

8 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎)

関数

$$y = x^x(1-x)^{1-x} \quad (0 < x < 1)$$

について、次の問いに答えよ。

問1 y の導関数を求めよ。

問2 y のとり得る値の範囲を求めよ。ただし、必要があれば、 $\lim_{t \rightarrow +0} t^t = 1$ であることを証明なしに用いてよい。

9 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎)

問1 不定積分 $\int \sin^2 t \, dt$, $\int \sin t \cos t \, dt$, $\int \cos^2 t \, dt$ をそれぞれ求めよ。

問2 等式

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(t-x) \, dt$$

を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。