

解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \sin \theta \cos \theta = \frac{a}{4} \end{cases}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 &= 1 + 2 \cdot \frac{a}{4} \\ \Leftrightarrow a &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} 4x^2 + 2(\sqrt{3}-1)x - \sqrt{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x-1)(2x+\sqrt{3}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

である。 $0 \leq \theta \leq \pi$ より $\sin \theta \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} (\sin \theta, \cos \theta) &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \therefore \theta &= \frac{5}{6}\pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\theta = \frac{5}{6}\pi$

問 1

$$\begin{aligned}
 & k^4 \left((k+1)^4 - (k-1)^4 \right) \\
 &= k^4 \left((k+1)^2 + (k-1)^2 \right) \left((k+1)^2 - (k-1)^2 \right) \\
 &= k^4 \left(2(k^2+1) \cdot 4k \right) \\
 &= 8k^7 + 8k^5
 \end{aligned}$$

より、 $s=t=8$ である。

(答) $s=t=8$

問 2

$$8(a_n + b_n) = n^4(n+1)^4 \cdots \textcircled{1}$$

において、 $n=1$ のとき

$$8(a_1 + b_1) = 8 \cdot (1^5 + 1^7) = 16 = 1^4(1+1)^4$$

より成り立つ。 $n=k$ のとき①が成り立つと仮定すると

$$8(a_k + b_k) = k^4(k+1)^4$$

$$8(k+1)^5 + 8(k+1)^7 = (k+1)^4 \left((k+2)^4 - k^4 \right) \quad (\because \text{問1})$$

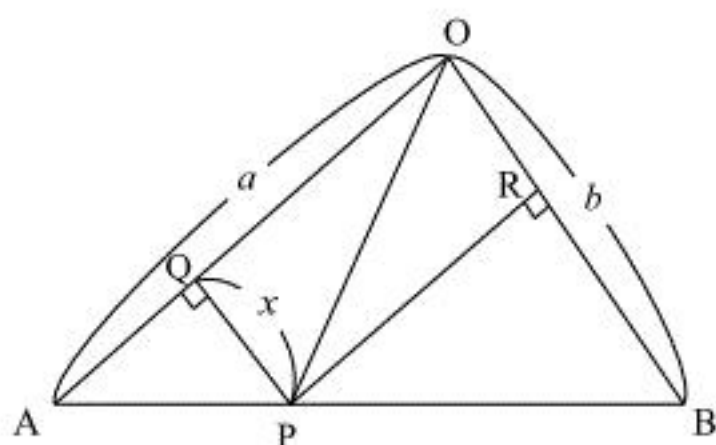
であるから

$$\begin{aligned}
 8(a_{k+1} + b_{k+1}) &= 8 \left(a_k + b_k + (k+1)^5 + (k+1)^7 \right) \\
 &= k^4(k+1)^4 + (k+1)^4 \left((k+2)^4 - k^4 \right) \\
 &= (k+1)^4(k+2)^4
 \end{aligned}$$

となり、 $n=k+1$ のときも①が成り立つことがわかる。以上より、数学的帰納法から自然数 n に対して①が成り立つことが示された。

(証明終)

問 1



$$S = \frac{1}{2}OA \cdot PQ + \frac{1}{2}OB \cdot PR$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}b \cdot PR$$

$$\Leftrightarrow PR = \frac{2S - ax}{b}$$

であり、これは $P = A, B$ でも成り立つので

$$PQ + PR = \frac{2S - ax}{b} + x = \frac{2S + (b - a)x}{b}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{2S + (b - a)x}{b}$$

問 2

$f(x) = \frac{2S + (b - a)x}{b}$ とおく。 x が値として取りうるのは

$$PQ \geq 0 \quad \text{かつ} \quad PR \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{2S - ax}{b} \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq x \leq \frac{2S}{a}$$

の範囲である。 $a \leq b$ より $f(x)$ は定数または単調減少関数であるから、最小値は

$$f\left(\frac{2S}{a}\right) = \frac{2S}{a}, \quad \text{最大値は } f(0) = \frac{2S}{b} \quad \text{である。}$$

$$(\text{答}) \quad \text{最小値 } \frac{2S}{a} \quad \text{最大値 } \frac{2S}{b}$$

問 1

$P(x, y), Q(X, Y)$ とすると

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= |\overline{OP}| \frac{\overline{OQ}}{|\overline{OQ}|} \\ &= \frac{\overline{OQ}}{|\overline{OQ}|^2} \quad (\because |\overline{OP}| |\overline{OQ}| = 1 \text{ より } |\overline{OP}| = \frac{1}{|\overline{OQ}|}) \\ &= \left(\frac{X}{X^2 + Y^2}, \frac{Y}{X^2 + Y^2} \right)\end{aligned}$$

より

$$(x, y) = \left(\frac{X}{X^2 + Y^2}, \frac{Y}{X^2 + Y^2} \right) \quad \dots \textcircled{1}$$

である。 C が原点を通るとき $a = b$ であり、 P が C の原点以外の点を動くとき、すなわち $(x, y) \neq (0, 0)$ のもとで、 $(X, Y) \neq (0, 0)$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}(x - a)^2 + y^2 &= a^2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{X}{X^2 + Y^2} - a \right)^2 + \left(\frac{Y}{X^2 + Y^2} \right)^2 &= a^2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{X}{X^2 + Y^2} \right)^2 - 2a \left(\frac{X}{X^2 + Y^2} \right) + \left(\frac{Y}{X^2 + Y^2} \right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{X^2 + Y^2} - 2a \left(\frac{X}{X^2 + Y^2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - 2aX &= 0 \\ \Leftrightarrow X &= \frac{1}{2a}\end{aligned}$$

となる。

(答) 直線 $x = \frac{1}{2a}$

問 2

C が原点を通らないとき $a \neq b$ であり、問 1 と同様に $(X, Y) \neq (0, 0)$ のもとで①を C の方程式に代入すると

$$\begin{aligned}(x - a)^2 + y^2 &= b^2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{X}{X^2 + Y^2} - a \right)^2 + \left(\frac{Y}{X^2 + Y^2} \right)^2 &= b^2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{X}{X^2 + Y^2} \right)^2 - 2a \left(\frac{X}{X^2 + Y^2} \right) + \left(\frac{Y}{X^2 + Y^2} \right)^2 &= b^2 - a^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{X^2 + Y^2} - 2a \left(\frac{X}{X^2 + Y^2} \right) &= b^2 - a^2 \\ \Leftrightarrow X^2 + Y^2 + \frac{2a}{b^2 - a^2} X - \frac{1}{b^2 - a^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(X + \frac{a}{b^2 - a^2} \right)^2 + Y^2 &= \frac{b^2}{(b^2 - a^2)^2}\end{aligned}$$

となる。

(答) 円 $\left(x + \frac{a}{b^2 - a^2} \right)^2 + y^2 = \frac{b^2}{(b^2 - a^2)^2}$

$n=1$ のとき, $a_n=2, b_n=-1$ であるから $a_n > 0, b_n < 0$ が成立する。 $n=k$ での成立, すなわち $a_k > 0, b_k < 0$ を仮定すると,

$$\begin{aligned}(2-\sqrt{3})^{k+1} &= (2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^k \\ &= (2-\sqrt{3})(a_k + b_k\sqrt{3}) \\ &= (2a_k - 3b_k) + (-a_k + 2b_k)\sqrt{3}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= 2a_k - 3b_k > 0 \\ b_{k+1} &= -a_k + 2b_k < 0\end{aligned}$$

であるから, $n=k+1$ でも成立する。以上より, 数学的帰納法から全ての自然数 n について $a_n > 0$ かつ $b_n < 0$ であることが示された。

(証明終)

問 1

k を自然数とする。このとき、 $k \leq x \leq k+1$ で

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$

である。辺々 k から $k+1$ で積分すると、

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$$

である。これを辺々 $k=1, 2, \dots, n-1$ まで足し合わせれば、

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \log_e n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\therefore \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \leq \log_e n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

となる。

(証明終)

問 2

問 1 の式で $n=4$ とすれば

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \leq \log_e 4 \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{12} \leq \log_e 4 \leq \frac{11}{6}$$

$$\therefore 1.08\cdots \leq \log_e 4 \leq 1.83\cdots$$

となり、整数部分は1であることがわかる。

(証明終)

問 1

点と直線の距離の公式より

$$f(t) = \frac{|t - (t^2 + 1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|t^2 - t + 1|}{\sqrt{2}}$$

であり

$$t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

であるから

$$f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{\sqrt{2}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{\sqrt{2}}$$

問 2

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right\}$$

より、 $f(t)$ は $t = \frac{1}{2}$ のとき、最小値

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値} \frac{3\sqrt{2}}{8} \quad (t = \frac{1}{2} \text{ のとき})$$

問 3

$t = \frac{1}{2}$ のとき、 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ である。また、点 H の座標を $H(s, s)$ とおくと

$$\overrightarrow{PH} \cdot (1, 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(s - \frac{1}{2}\right) + \left(s - \frac{5}{4}\right) = 0$$

$$\therefore s = \frac{7}{8}$$

である。これより、点 H の座標は $H\left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad P\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right), \quad H\left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right)$$

問 1

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + 4y^2 + 2x + 4y - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4y^2 + 2(x+2)y + x^2 + 2x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{-x-2 \pm \sqrt{(x+2)^2 - 4 \cdot (x^2 + 2x - 4)}}{4} \\ \Leftrightarrow y &= \frac{-x-2 \pm \sqrt{-3x^2 - 4x + 20}}{4} \end{aligned}$$

である。ここで、 x が実数とすると
「 y が実数」

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -3x^2 - 4x + 20 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (3x+10)(x-2) &\leq 0 \\ \therefore -\frac{10}{3} &\leq x \leq 2 \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad y = \frac{-x-2 \pm \sqrt{-3x^2 - 4x + 20}}{4}, \quad -\frac{10}{3} \leq x \leq 2$$

問 2

$$y = \frac{-x-2 \pm \sqrt{-3x^2 - 4x + 20}}{4} \text{ のとき, } -\frac{10}{3} < x < 2 \text{ において}$$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{4} \pm \frac{-6x-4}{8\sqrt{-3x^2 - 4x + 20}} \\ &= -\frac{1}{4} \mp \frac{3x+2}{4\sqrt{-3x^2 - 4x + 20}} \\ y'' &= \mp \frac{1}{4} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt{-3x^2 - 4x + 20} - (3x+2) \cdot \frac{-6x-4}{2\sqrt{-3x^2 - 4x + 20}}}{-3x^2 - 4x + 20} \\ &= \mp \frac{3 \cdot (-3x^2 - 4x + 20) - (3x+2)(-3x-2)}{4(-3x^2 - 4x + 20)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \mp \frac{16}{(-3x^2 - 4x + 20)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\text{である(複号同順)。以下, } y_+ = \frac{-x-2 + \sqrt{-3x^2 - 4x + 20}}{4}, y_- = \frac{-x-2 - \sqrt{-3x^2 - 4x + 20}}{4} \text{ とする。}$$

このとき

$$\begin{aligned} y_+' &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{4} - \frac{3x+2}{4\sqrt{-3x^2 - 4x + 20}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{-3x^2 - 4x + 20} &= -3x-2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 - 4x + 20 = (3x+2)^2 \\ x < -\frac{2}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4x - 4 = 0 \\ x < -\frac{2}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2)(x+2) = 0 \\ x < -\frac{2}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow x &= -2 \\ y_-' &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{4} + \frac{3x+2}{4\sqrt{-3x^2 - 4x + 20}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{-3x^2 - 4x + 20} &= 3x+2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 - 4x + 20 = (3x+2)^2 \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2)(x+2) = 0 \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{である。また, } -\frac{10}{3} < x < 2 \text{ で } \frac{16}{(-3x^2 - 4x + 20)^{\frac{3}{2}}} > 0 \text{ であるから,}$$

$$\begin{aligned} y_+'' &< 0 \\ y_-'' &> 0 \end{aligned}$$

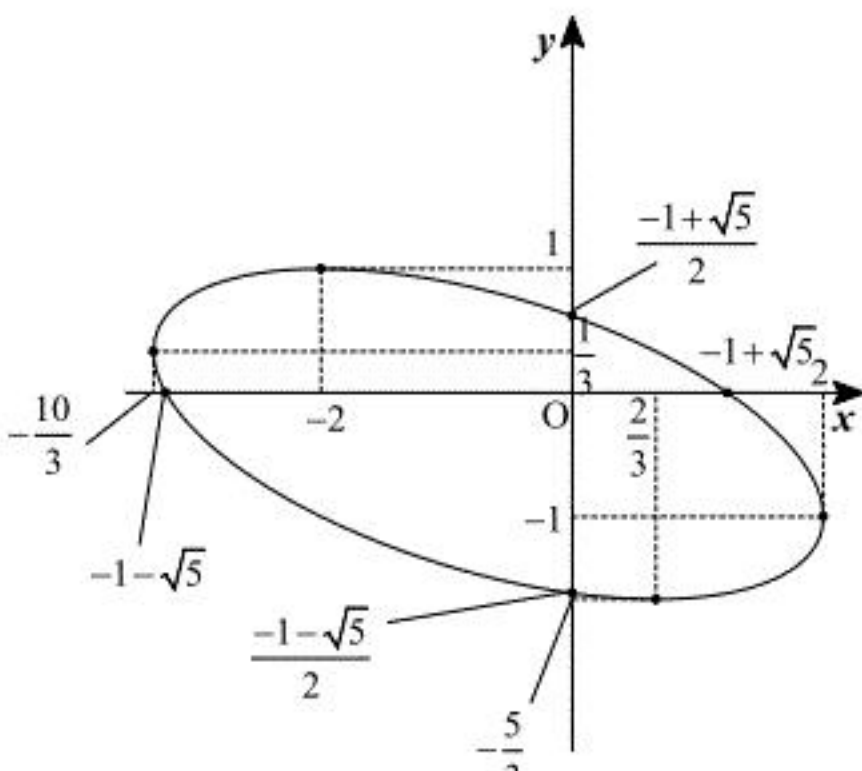
である。これより、増減表は以下の通りとなる。

x	$-\frac{10}{3}$	...	-2	...	$\frac{2}{3}$	...	2
y_+'		+	0	-	-	-	
y_+''		-	-	-	-	-	
y_+	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$		$\searrow$	-1
y_-'		-	-	-	0	+	
y_-''		+	+	+	+	+	
y_-	$\frac{1}{3}$	$\searrow$		$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	-1

また、この曲線と x 軸の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

である。以上より、この曲線のグラフは下図の通りである。



問 1

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

より、商は $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ である。

(答) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

問 2

ド・モアブルの定理より

$$w^5 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

である。ここで、 $w-1 \neq 0$ であるから、

$$w^4 + w^3 + w^2 + w + 1 = \frac{w^5 - 1}{w - 1} = \frac{1 - 1}{w - 1} = 0$$

である。

(答) 0

問 3

$|w|=1$ であることと、問 2 の結果を用いれば、

$$\begin{aligned} & |z-1|^2 + |z-w|^2 + |z-w^2|^2 + |z-w^3|^2 + |z-w^4|^2 \\ &= (z-1)\overline{(z-1)} + (z-w)\overline{(z-w)} + (z-w^2)\overline{(z-w^2)} + (z-w^3)\overline{(z-w^3)} + (z-w^4)\overline{(z-w^4)} \\ &= 5z\bar{z} - z\overline{(1+w+w^2+w^3+w^4)} - \bar{z}(1+w+w^2+w^3+w^4) + 1 + w\bar{w} + w^2\bar{w}^2 + w^3\bar{w}^3 + w^4\bar{w}^4 \\ &= 5|z|^2 + 1 + |w|^2 + |w|^4 + |w|^6 + |w|^8 \\ &= 5|z|^2 + 5 \end{aligned}$$

であることが分かる。これより、 $|z-1|^2 + |z-w|^2 + |z-w^2|^2 + |z-w^3|^2 + |z-w^4|^2$ が最小値となる

のは $|z|^2$ が最小となるとき、すなわち $z=0$ のときであり、そのとき

$$|z-1|^2 + |z-w|^2 + |z-w^2|^2 + |z-w^3|^2 + |z-w^4|^2 = 5$$

である。

(答) 最小値 5 ($z=0$ のとき)