

平成 29 年度 入 学 試 験 問 題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 志望する受験区分に応じて、次の指示に従って解答しなさい。
(指定外の問題に解答した場合には採点されません。)
 - ・ 数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻の受験者は
[5], [6], [7], [8], [9]に必答しなさい。
 - ・ 教育科学専攻(中等)・理科選修・理科専攻の受験者は
[3], [4], [5]に必答しなさい。
 - ・ 技術専攻の受験者は
[3], [4]に必答し、
[5], [6]のうちから1題を選択し解答しなさい。
 - ・ 教育科学選修(初等)の受験者および生活科選修・音楽選修・音楽専攻・美術
選修・美術専攻・保健体育選修・保健体育専攻・家庭選修・家庭専攻・特別
支援学校教員養成課程・養護教諭養成課程の受験者は
[1], [2]に必答しなさい。
3. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

解答上の注意

必答問題については、問題番号の印刷してある解答用紙に解答しなさい。

選択問題については、問題番号の印刷していない解答用紙に、選択した問題の番号を記入してから解答しなさい。

◎印は必答問題，○印は選択問題を示す。

- 1 (教育科学選修(初等)・生活科選修・音楽選修・音楽専攻・美術選修・美術専攻・保健体育選修・保健体育専攻・家庭選修・家庭専攻・特別支援学校教員養成課程・養護教諭養成課程◎)

a を実数とする。 x の2次方程式 $4x^2 + 2(\sqrt{3} - 1)x + a = 0$ の2つの解が $\sin \theta$, $\cos \theta$ であるとき， θ の値を求めよ。ただし， $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。

- 2 (教育科学選修(初等)・生活科選修・音楽選修・音楽専攻・美術選修・美術専攻・保健体育選修・保健体育専攻・家庭選修・家庭専攻・特別支援学校教員養成課程・養護教諭養成課程◎)

自然数 n に対して、 $a_n = 1^5 + 2^5 + \cdots + n^5$ 、 $b_n = 1^7 + 2^7 + \cdots + n^7$ と定める。このとき、次の問いに答えよ。

問1 $k^4((k+1)^4 - (k-1)^4) = sk^7 + tk^5$ が k についての恒等式となるように定数 s 、 t の値を定めよ。

問2 問1の結果を用いて、数学的帰納法により、 $8(a_n + b_n) = n^4(n+1)^4$ を示せ。

3 (教育科学専攻(中等)・理科選修・理科専攻◎, 技術専攻◎)

鋭角三角形 OAB において, $OA=a$, $OB=b$ とし, 三角形 OAB の面積を S とする。
ただし, $a \geq b$ とする。辺 AB 上に点 P をとり, P から辺 OA , OB に下ろした垂線
をそれぞれ PQ , PR とする。ただし, $P=A$ のとき $Q=A$, $P=B$ のとき $R=B$ とす
る。点 P が辺 AB 上を動くとき, 次の問いに答えよ。

問1 点 P , Q 間の距離を x とする。点 P , Q 間の距離と 点 P , R 間の距離の和を
 x , a , b , S を用いて表わせ。

問2 問1 の式の値の最小値と最大値を a , b , S を用いて表わせ。

4 (教育科学専攻(中等)・理科選修・理科専攻◎, 技術専攻◎)

xy 平面において, 原点 $O(0,0)$ とは異なる点 P に対し, Q を半直線 OP 上にあって, $OP \times OQ = 1$ を満たす点とする。また, $a > 0$ に対し, 中心 $(a, 0)$, 半径 b の円を C とする。

問1 C が原点を通るとする。 P が C 上の原点とは異なる点全体を動くとき, 点 Q の軌跡を求めよ。

問2 C が原点を通らないとする。 P が C 上の点全体を動くとき, 点 Q の軌跡を求めよ。

- 5 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎，教育科学専攻(中等)・理科選修・理科専攻◎，技術専攻○)

自然数 n に対して，整数 a_n, b_n を

$$(2 - \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$$

によって定める。このとき，全ての自然数 n について， $a_n > 0$ かつ $b_n < 0$ であることを数学的帰納法によって示せ。

6 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎, 技術専攻○)

次の問いに答えよ。

問1 2以上の自然数 n に対して,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \leq \log_e n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

が成り立つことを示せ。ただし, e は自然対数の底を表わす。

問2 e の近似値を使わず, $\log_e 4$ の整数部分が1であることを示せ。

7 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎)

xy 平面において、曲線 $y = x^2 + 1$ 上の点 $P(t, t^2 + 1)$ から直線 $y = x$ に下ろした垂線 PH の長さを $f(t)$ とするとき、次の問いに答えよ。

問1 t の関数 $f(t)$ を求めよ。

問2 $f(t)$ の最小値と、そのときの t を求めよ。

問3 $f(t)$ を最小とするような P, H の座標を求めよ。

8 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎)

方程式 $x^2 + 2xy + 4y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$ を考える。

問1 上の方程式を y について解け。また、上の方程式を満たす x, y がどちらも実数であるような x の範囲を求めよ。

問2 問1で得られた2つの関数のグラフを極大値、極小値を明記し、上に凸か下に凸かも考慮して描け。ただし、 x の範囲は問1で得られたものとする。

9 (数学選修・数学専攻・情報選修・情報専攻◎)

複素数 w を

$$w = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$$

と定める。ただし、 i は虚数単位を表わす。

問1 変数 x の多項式 $x^5 - 1$ を $x - 1$ で割った商を求めよ。

問2 $w^4 + w^3 + w^2 + w + 1$ の値を求めよ。

問3 z が複素数平面上を動くとき

$$|z - 1|^2 + |z - w|^2 + |z - w^2|^2 + |z - w^3|^2 + |z - w^4|^2$$

の最小値を求めよ。また、最小値を与える z を求めよ。