

左辺を変形すると、

$$a(a-1)x^2 + (2-3a)x + 2 = (ax-2)\{(a-1)x-1\}$$

となる。したがって、 $a \neq 0, 1$ より、(左辺)=0 となるのは $x = \frac{2}{a}, \frac{1}{a-1}$ である。これらの大小関

係を考える。 $a < 0, 1 < a$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{2}{a} - \frac{1}{a-1} &= \frac{2(a-1)-a}{a(a-1)} \\ &= \frac{a-2}{a(a-1)} \end{aligned}$$

であり、 $a(a-1) > 0$ であることから、 $a > 2$ のとき $\frac{2}{a} > \frac{1}{a-1}$ 、 $a = 2$ のとき $\frac{2}{a} = \frac{1}{a-1}$ 、

$2 > a > 1, 0 > a$ のとき $\frac{2}{a} < \frac{1}{a-1}$ となる。また $0 < a < 1$ のとき、 $\frac{2}{a} > 0, \frac{1}{a-1} < 0$ より $\frac{1}{a-1} < \frac{2}{a}$ であ

る。したがって、

$$0 < a < 1, 2 < a \text{ のとき } \frac{2}{a} > \frac{1}{a-1}$$

$$a < 0, 1 < a < 2 \text{ のとき } \frac{2}{a} < \frac{1}{a-1}$$

$$a = 2 \text{ のとき } \frac{2}{a} = \frac{1}{a-1}$$

である。また、2 次の係数の正負から、 $y = a(a-1)x^2 + (2-3a)x + 2$ のグラフは $a < 0, 1 < a$ のとき下に、 $0 < a < 1$ のとき上に凸である。以上の情報から、不等式を場合分けして解く。

[1] $a < 0$ のとき

$$\frac{2}{a} < \frac{1}{a-1} \text{ であり、グラフは下に凸であるから、} y < 0 \text{ となる解は } \frac{2}{a} < x < \frac{1}{a-1} \text{ である。}$$

[2] $0 < a < 1$ のとき

$$\frac{1}{a-1} < \frac{2}{a} \text{ であり、グラフは上に凸であるから、} y < 0 \text{ となる解は } x < \frac{1}{a-1}, \frac{2}{a} < x \text{ である。}$$

[3] $1 < a < 2$ のとき

$$\frac{2}{a} < \frac{1}{a-1} \text{ であり、グラフは下に凸であるから、} y < 0 \text{ となる解は } \frac{2}{a} < x < \frac{1}{a-1} \text{ である。}$$

[4] $a = 2$ のとき

グラフは $x = 1$ で x 軸に接する下に凸な放物線であるから、 $y < 0$ となる解は存在しない。

[5] $a > 2$ のとき

$$\frac{1}{a-1} < \frac{2}{a} \text{ であり、グラフは下に凸であるから、} y < 0 \text{ となる解は } \frac{1}{a-1} < x < \frac{2}{a} \text{ である。}$$

以上から、求める解は

$$a < 0, 1 < a < 2 \text{ のとき } \frac{2}{a} < x < \frac{1}{a-1}$$

$$0 < a < 1 \text{ のとき } x < \frac{1}{a-1}, \frac{2}{a} < x$$

$$a = 2 \text{ のとき解なし}$$

$$a > 2 \text{ のとき } \frac{1}{a-1} < x < \frac{2}{a}$$

である。

$$(\text{答}) \ a < 0, 1 < a < 2 \text{ のとき } \frac{2}{a} < x < \frac{1}{a-1}$$

$$0 < a < 1 \text{ のとき } x < \frac{1}{a-1}, \frac{2}{a} < x$$

$$a = 2 \text{ のとき解なし}$$

$$a > 2 \text{ のとき } \frac{1}{a-1} < x < \frac{2}{a}$$

問 1

A が表を出した場合、B が投げた結果によらず $(2, 1)$ となる。この確率は $\frac{1}{2}$ である。A が裏を出した場合、B が表を出すと $(1, 2)$ に、裏を出すと $(1, 0)$ になる。それらの確率は共に $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ である。

(答) 確率 $\frac{1}{2}$ で位置 $(2, 1)$ 、確率 $\frac{1}{4}$ で位置 $(1, 2)$ 、確率 $\frac{1}{4}$ で位置 $(1, 0)$

問 2

このゲームでは、どちらかが硬貨を投げた結果 2 マス以上先行することができた場合、もう一方はその地点から抜かすことはできないため、勝利が決定する。例えば、A が投げて 2 マス先にコマがある場合、問 1 の結果から B は追いつくことができない。A が 3 マス以上先行した場合も、B が硬貨を投げたとき、最大でも A の 1 マス後ろにつくことしかできない。これを用いて、B が勝つようにするためには、A に 2 マス以上先行されることがないようにゲームを進める必要がある。逆に、A より 2 マス以上先行することができたら B の勝利となる。1 回目の操作で A が B より先行していると、2 回目に A が表を出しても裏を出しても A が B より 2 マス先行することになり、A の勝利が確定する。よって、B が勝つためには A は 1 回目に裏を出さなければならず、このとき位置は $(1, 0)$ である。次に B が裏を出すと位置は $(1, 0)$ であり、2 回目に A が硬貨を投げることで 2 マス以上先行されてしまい、B が勝つことができない。したがって、B は表を出さなければならず、位置は $(1, 2)$ となる。

[1] 2 回目に A が表を出す場合

位置は $(3, 2)$ となる。 $(1, 0)$ のときと同じように、2 回目に B が裏を出すと勝利できないから、B は表を出さなければならず、位置は $(3, 4)$ となる。3 回目に A が表を出す場合、位置は $(5, 4)$ となる。このとき、B が表を出せば B の勝利となる (B が裏を出せば A の勝利となる)。以上の確率は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$$

となる。また、3 回目に A が裏を出す場合、位置は $(3, 4)$ となる。次に B が硬貨を投げることで B は A より 2 マス以上先行することができ、B の勝利が決まる。以上の確率は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

となる。

[2] 2 回目に A が裏を出す場合

位置は $(1, 2)$ となる。次に B が硬貨を投げることで B は A より 2 マス以上先行することができ、B の勝利が決まる。以上の確率は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

となる。

[1], [2] から、求める確率は、

$$\frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \frac{1}{8} = \frac{11}{64}$$

となる。

(答) $\frac{11}{64}$

曲線の式について

$$\begin{aligned} y' &= 2x(x-1) + x^2 \\ &= x(3x-2) \end{aligned}$$

であるから、接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y - a^2(a-1) &= a(3a-2)(x-a) \\ \Leftrightarrow y &= a(3a-2)x - a^2(2a-1) \end{aligned}$$

となる。ここで、 b を実数として曲線と接線の接点以外の交点を $(b, b^2(b-1))$ とし、

$l(x) = a(3a-2)x - a^2(2a-1)$ とおく。このとき、方程式 $x^2(x-1) - l(x) = 0$ は $x=a$ で重解を、

$x=b$ でもう1つの解をもつ。したがってこの方程式は $(x-a)^2(x-b) = 0$ とかける。求める面積は、

$$\begin{aligned} \left| \int_b^a (x-a)^2(x-b) dx \right| &= \left| \left[\frac{1}{3}(x-a)^3(x-b) \right]_b^a - \frac{1}{3} \int_b^a (x-a)^3 dx \right| \\ &= \left| \left[-\frac{1}{12}(x-a)^4 \right]_b^a \right| \\ &= \left| \frac{1}{12}(b-a)^4 \right| \\ &= \frac{1}{12}(b-a)^4 \end{aligned}$$

である。以上から、 a, b の大小によらず

$$\frac{1}{12}(b-a)^4 = \frac{1}{12}$$

である。 a, b は実数であるから、

$$b-a = \pm 1$$

となる。 $x=b$ で曲線と接線が交わることから方程式を立てて解く。 $b=a+1$ のとき、

$$\begin{aligned} (a+1)^2\{(a+1)-1\} &= a(3a-2)(a+1) - a^2(2a-1) \\ \Leftrightarrow a^3 + 2a^2 + a &= a^3 + 2a^2 - 2a \\ \therefore a &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $b=a-1$ のとき、

$$\begin{aligned} (a-1)^2\{(a-1)-1\} &= a(3a-2)(a-1) - a^2(2a-1) \\ \Leftrightarrow (a^2 - 2a + 1)(a-2) &= (3a^3 - 5a^2 + 2a) - (2a^3 - a^2) \\ \Leftrightarrow a^3 - 4a^2 + 5a - 2 &= a^3 - 4a^2 + 2a \\ \therefore a &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

関数の絶対値を外して整理すると,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x \log(x-t+1) dt + \int_x^1 \log(t-x+1) dt \\
 &= -\int_0^x (x-t+1)' \log(x-t+1) dt + \int_x^1 (t-x+1)' \log(t-x+1) dt \\
 &= -\left[(x-t+1)\log(x-t+1)\right]_0^x + \left[(t-x+1)\log(t-x+1)\right]_x^1 \\
 &\quad -\int_0^x \frac{x-t+1}{x-t+1} dt - \int_x^1 \frac{t-x+1}{t-x+1} dt \\
 &= (1+x)\log(1+x) + (2-x)\log(2-x) - x - (1-x) \\
 &= (1+x)\log(1+x) + (2-x)\log(2-x) - 1
 \end{aligned}$$

となり, x で微分すると,

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \log(1+x) + \frac{1+x}{1+x} - \log(2-x) - \frac{2-x}{2-x} \\
 &= \log \frac{1+x}{2-x}
 \end{aligned}$$

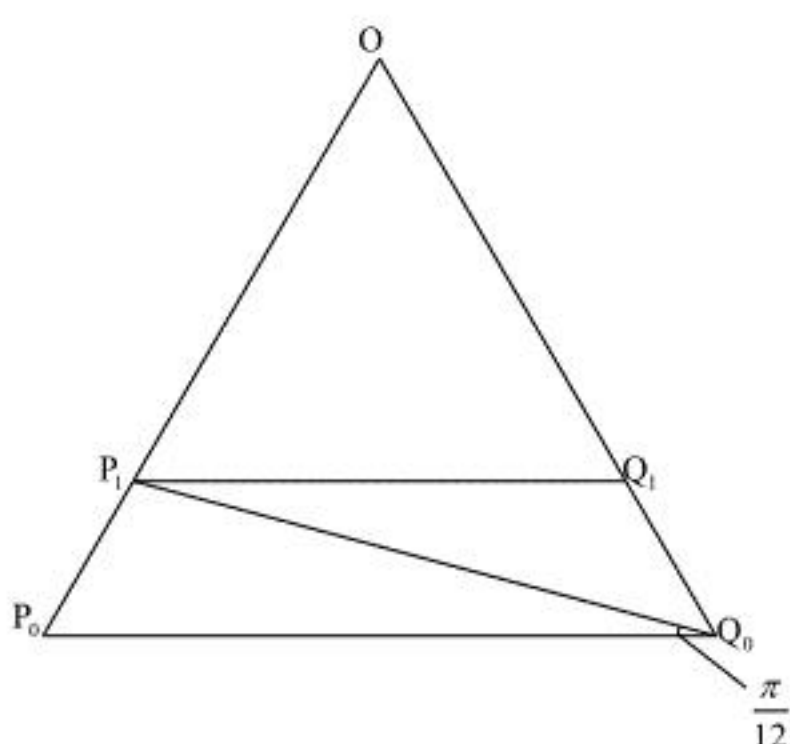
となる。 $f'(x)=0$ となるのは, $\frac{1+x}{2-x}=1$ すなわち $x=\frac{1}{2}$ のときである。以上をもとに増減表を

描くと以下ようになる。

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	$2\log 2 - 1$	$\searrow$	$3\log \frac{3}{2} - 1$	$\nearrow$	$2\log 2 - 1$

したがって, $x=0, 1$ のとき最大値 $2\log 2 - 1$ を, $x=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $3\log \frac{3}{2} - 1$ をとる。

(答) $x=0, 1$ のとき最大値 $2\log 2 - 1$, $x=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $3\log \frac{3}{2} - 1$



三角形 $P_0Q_0P_1$ について正弦定理を適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{P_0Q_0}{\sin \angle P_0P_1Q_0} &= \frac{P_0P_1}{\sin \angle P_0Q_0P_1} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} \right)} &= \frac{P_0P_1}{\sin \frac{\pi}{12}} \\ \Leftrightarrow P_0P_1 &= \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{7\pi}{12}} \end{aligned}$$

となる。ここで加法定理より、

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{7\pi}{12} &= \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

である。よって、

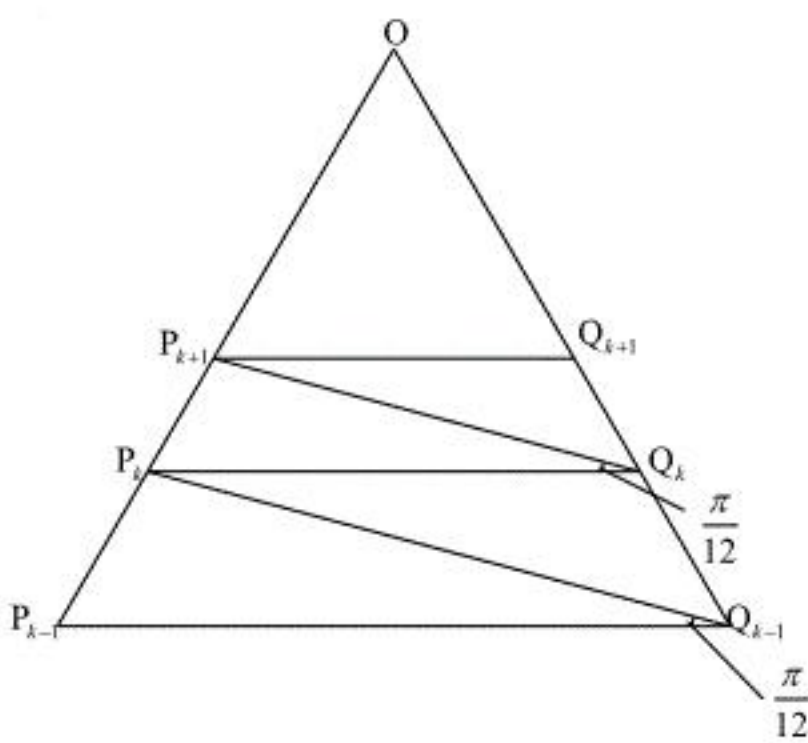
$$P_0P_1 = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

である。以上から、

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \cdot P_0P_1 \cdot P_0Q_0 \cdot \sin \angle P_1P_0Q_0 \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2 - \sqrt{3}) \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{3} - 3}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $a_1 = \frac{2\sqrt{3} - 3}{4}$



$P_{k-1}Q_{k-1}$ と P_kQ_k は平行であるから、三角形 $P_{k-1}Q_{k-1}P_k$ ($k=1, 2, \dots$) は全て互いに相似である。三角形 $P_{k-1}Q_{k-1}P_k$ と三角形 $P_kQ_kP_{k+1}$ の相似比は、

$$OP_k : OP_{k+1} = OP_0 : OP_1 = 1 : 1 - (2 - \sqrt{3}) = 1 : \sqrt{3} - 1$$

である。よって三角形 $P_{k-1}Q_{k-1}P_k$ と三角形 $P_kQ_kP_{k+1}$ の面積比は、

$$1^2 : (\sqrt{3} - 1)^2 = 1 : 4 - 2\sqrt{3}$$

である。したがって、 $a_k = (4 - 2\sqrt{3})a_{k-1}$ より、数列 $\{a_k\}$ は初項 $a_1 = \frac{2\sqrt{3} - 3}{4}$ 、公比 $(4 - 2\sqrt{3})$ の

等比数列であるから、第 n 項までの和をとると、

$$S_n = \frac{2\sqrt{3} - 3}{4} \cdot \frac{1 - (4 - 2\sqrt{3})^n}{1 - (4 - 2\sqrt{3})}$$

である。ここで $2.25 < 3 < 4$ より、 $1.5 < \sqrt{3} < 2$ だから $0 < 4 - 2\sqrt{3} < 1$ が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{2\sqrt{3} - 3}{4} \cdot \frac{1}{1 - (4 - 2\sqrt{3})} \\ &= \frac{2\sqrt{3} - 3}{4} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3} - 3} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{4}$