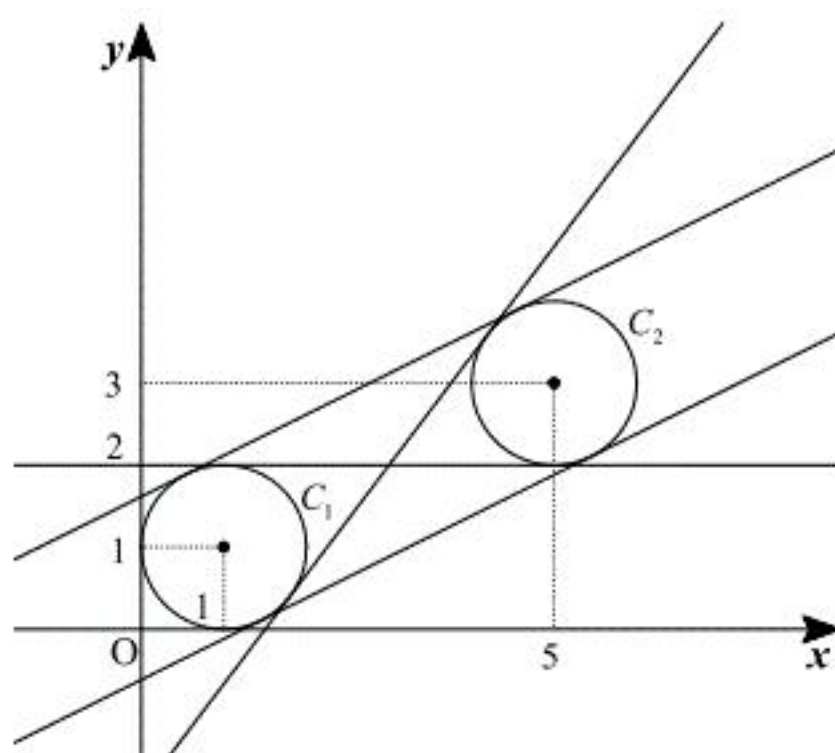




共通接線は y 軸に平行でないので、 a, b を実数として方程式を $y = ax + b$ とおくことができる。

円 C_1 において、円の中心と接線との距離は半径の長さに等しく、点と直線の距離の公式より

$$\frac{|a-1+b|}{\sqrt{a^2+1}}=1$$

$$\therefore |a-1+b| = \sqrt{a^2+1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。同様に、円 C_2 において

$$\frac{|5a-3+b|}{\sqrt{a^2+1}}=1$$

$$\therefore |5a-3+b| = \sqrt{a^2+1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。①、②より

$$|a-1+b| = |5a-3+b|$$

$$\Leftrightarrow a-1+b = 5a-3+b \text{ または } a-1+b = -5a+3-b$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ または } b = -3a+2$$

が成立する。

[1] $a = \frac{1}{2}$ のとき

$a = \frac{1}{2}$ を①に代入して

$$\left| \frac{1}{2} - 1 + b \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + 1}$$

$$\therefore b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

となる。よって、共通接線の方程式は

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}, y = \frac{1}{2}x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

となる。

[2] $b = -3a+2$ のとき

$b = -3a+2$ を①に代入して、

$$|a-1-3a+2| = \sqrt{a^2+1}$$

$$\therefore |-2a+1| = \sqrt{a^2+1}$$

となる。両辺正より 2 乗しても同値関係は変わらず、

$$4a^2 - 4a + 1 = a^2 + 1$$

$$\therefore a = 0, \frac{4}{3}$$

であり、 $b = -3a+2$ に代入して、

$$(a, b) = (0, 2), \left(\frac{4}{3}, -2 \right)$$

となる。よって、共通接線の方程式は

$$y = 2, y = \frac{4}{3}x - 2$$

である。

以上[1], [2]より、共通接線の方程式は

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{4}{3}x - 2 \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{4}{3}x - 2 \end{cases}$$

問 1

線分 OQ は $\angle O$ の二等分線であるから、角の二等分線の性質より

$$AQ:QB=OA:OB=s:t \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \frac{t}{s+t} \overrightarrow{OA} + \frac{s}{s+t} \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{t}{s+t} \vec{a} + \frac{s}{s+t} \vec{b}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{t}{s+t} \vec{a} + \frac{s}{s+t} \vec{b}$$

問 2

①式より

$$AQ = \frac{s}{s+t} \cdot u = \frac{su}{s+t}$$

である。ここで三角形の内心は3頂角の二等分線の交点であるから、線分 AP は $\angle A$ の二等分線である。よって角の二等分線の性質より

$$\begin{aligned}OP:PQ &= AO:AQ \\ &= s:\frac{su}{s+t} \\ &= (s+t):u\end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{s+t}{s+t+u} \overrightarrow{OQ} \\ &= \frac{s+t}{s+t+u} \left(\frac{t}{s+t} \vec{a} + \frac{s}{s+t} \vec{b} \right) \\ &= \frac{t}{s+t+u} \vec{a} + \frac{s}{s+t+u} \vec{b}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{t}{s+t+u} \vec{a} + \frac{s}{s+t+u} \vec{b}$$

数学的帰納法を用いて与式が成立することを示す。

[1] $n=2$ のとき

$a_1 > 2$ かつ $a_2 > 4$ であるから

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right) < \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8} < 2$$

となり、与式が成立する。

[2] $n=k$ (k は 2 以上の自然数) で成立すると仮定したとき

すなわち

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) < k \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立すると仮定する。 $a_{k+1} > 2k+2$ であるから

$$1 + \frac{1}{a_{k+1}} < 1 + \frac{1}{2k+2} = \frac{2k+3}{2k+2}$$

となり、これと①より

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_k}\right)\left(1 + \frac{1}{a_{k+1}}\right) < k \cdot \frac{2k+3}{2k+2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立する。ここで

$$k \cdot \frac{2k+3}{2k+2} = \frac{2k^2+3k}{2k+2} = k + \frac{k}{2k+2} < k+1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となるので、②、③より

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{a_{k+1}}\right) < k+1$$

となり、 $n=k+1$ のときも与式が成立する。

以上[1],[2]より、数学的帰納法により与式が成立することが示された。

問 1

$f(x)$ を x で微分して,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2 \{2(x+4)(2x-1) + 2(x+4)^2\} - 6x(x+4)^2(2x-1)}{9x^4} \\ &= \frac{6x(x+4)\{x(2x-1) + x(x+4) - (x+4)(2x-1)\}}{9x^4} \\ &= \frac{6x(x+4)(x-2)^2}{9x^4} \\ &= \frac{2(x+4)(x-2)^2}{3x^3} \end{aligned}$$

となる。さらに $f'(x)$ を x で微分して,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{3x^3 \{2(x-2)^2 + 4(x+4)(x-2)\} - 9x^2 \cdot 2(x+4)(x-2)^2}{9x^6} \\ &= \frac{3x^2(x-2)\{2x(x-2) + 4x(x+4) - 6(x+4)(x-2)\}}{9x^6} \\ &= \frac{3x^2(x-2) \cdot 48}{9x^6} \\ &= \frac{16(x-2)}{x^4} \end{aligned}$$

となるから, 増減表を書くと以下のようになる。

x	...	-4	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-		+	0	+
$f''(x)$	-	-	-		-	0	+
$f(x)$	↗	0	↘		↗	9	↗

増減表より, $f(x)$ は $x=-4$ で極大値 0 をとり, 変曲点 $(2, 9)$ を持つことが分かる。

(答) 前述

問 2

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(x+4)^2(2x-1)}{3x^2} - \left(\frac{2}{3}x+5\right) \\ &= \frac{24x-16}{3x^2} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} g(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow x &> \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。また

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24 - \frac{16}{x}}{3x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{24 - \frac{16}{x}}{3x} = 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x > \frac{2}{3}, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

問 3

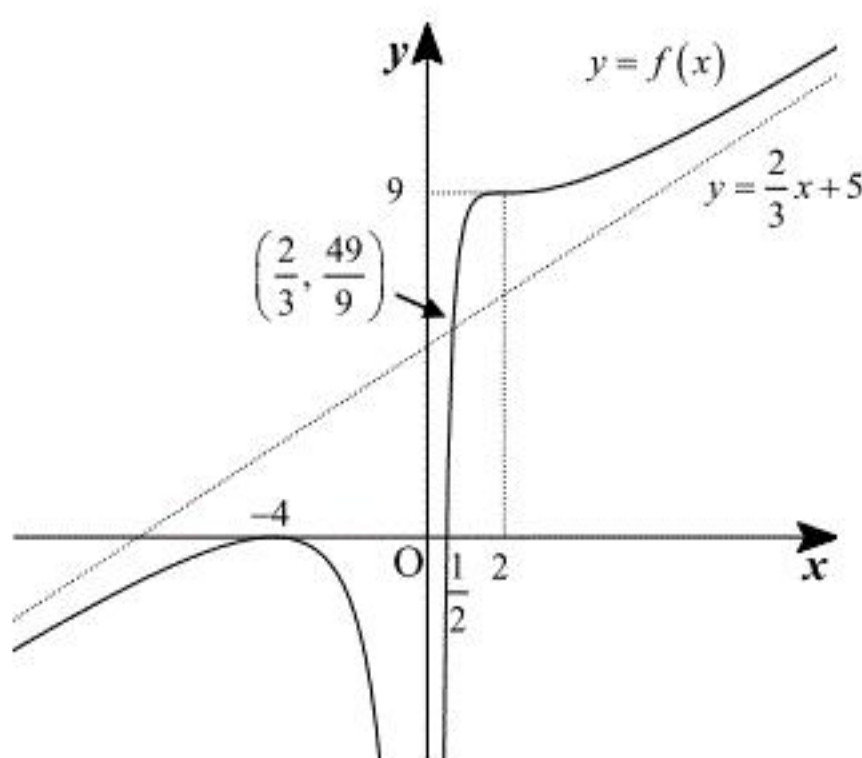
問 2 の結果より, 直線 $y = \frac{2}{3}x + 5$ は $y = f(x)$ の漸近線であり, 共有点 $\left(\frac{2}{3}, \frac{49}{9}\right)$ を持つことが分かる。また,

$$f(x) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^2 (2x-1)$$

であるから,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

となる。よって, 問 1 の結果も合わせて, $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる。



(答) 前図

問 1

$y = \sqrt{x+2}$ を x について解く。 x の定義域が $x \geq -2$ で y の値域が $y \geq 0$ であることに注目すると

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x+2} \\ \Leftrightarrow y^2 &= x+2 \\ \Leftrightarrow x &= y^2 - 2 \end{aligned}$$

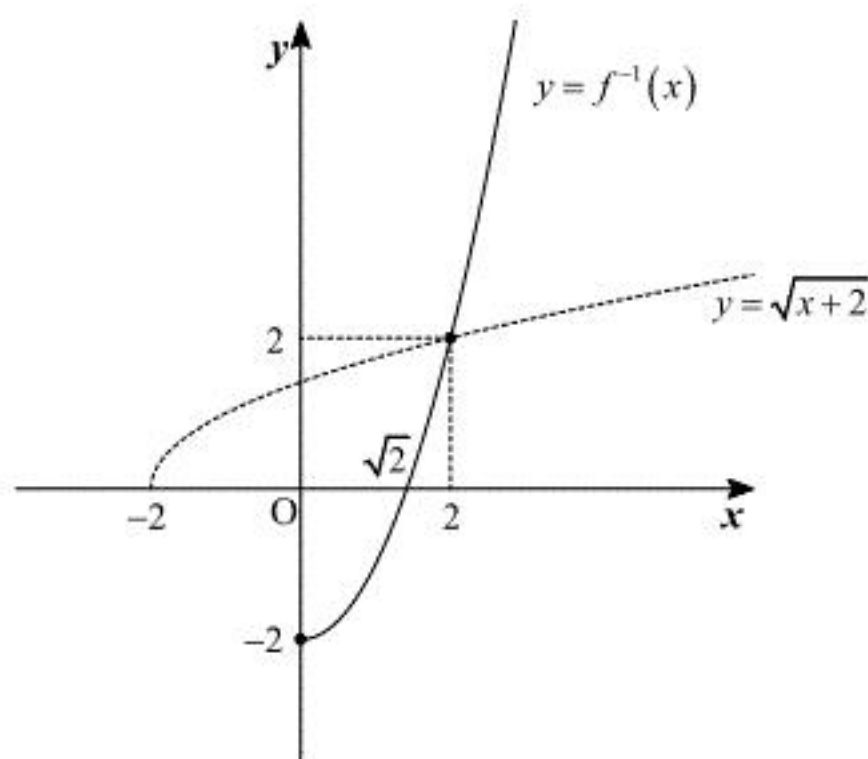
となるから、 $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ は

$$f^{-1}(x) = x^2 - 2 \quad (x \geq 0)$$

である。また、曲線 $y = f^{-1}(x)$ と直線 $y = x$ の共有点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 - 2 &= x \\ \Leftrightarrow (x-2)(x+1) &= 0 \\ \therefore x &= 2 \quad (\because x \geq 0) \end{aligned}$$

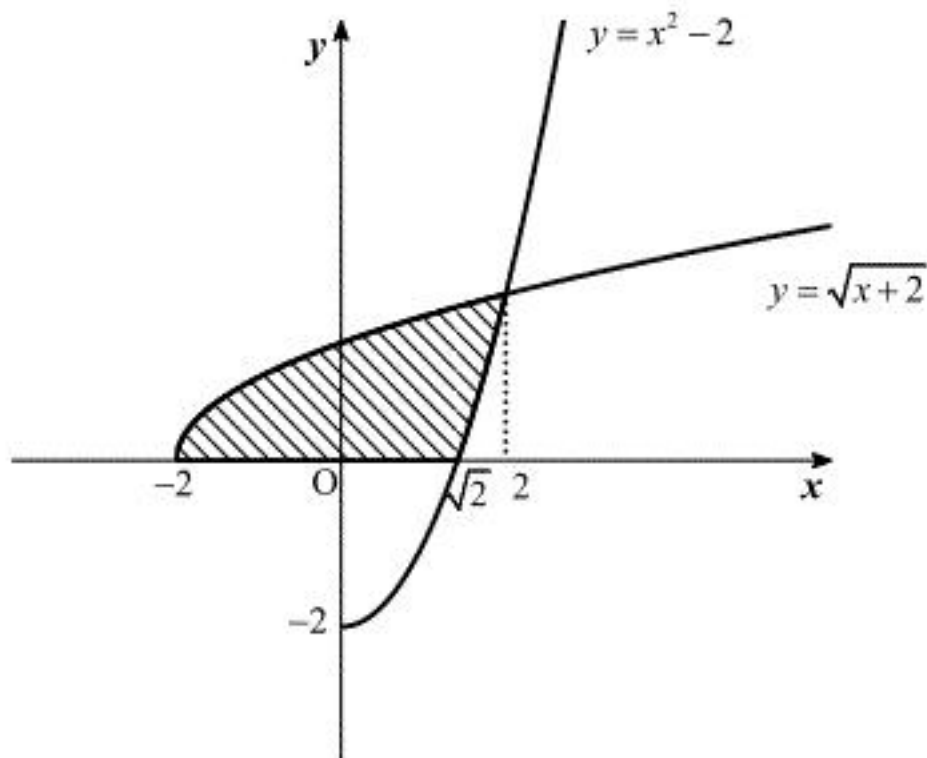
と求まる。よって、 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは下図の実線部のようにになる。ただし、端点 $(0, -2)$ を含む。



(答) $f^{-1}(x) = x^2 - 2$, グラフは上図

問 2

求めるのは下図の斜線部の面積である。



上図より、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \sqrt{x+2} dx - \int_{\sqrt{2}}^2 (x^2 - 2) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-2}^2 - \left[\frac{1}{3} x^3 - 2x \right]_{\sqrt{2}}^2 \\ &= \frac{16}{3} + \frac{4}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{20 - 4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{20 - 4\sqrt{2}}{3}$