

平成31年度入学試験問題

数 学

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 志願先に応じて、次の指示に従って解答しなさい。
  - ・ 数学選修，数学専攻，情報選修，情報専攻，教育科学専攻(中等)すべての問題に解答しなさい。
3. 試験終了後，問題冊子は持ち帰りなさい。

解答上の注意

問題番号の印刷してある解答用紙に解答しなさい。

解答用紙には，受験番号を記入する欄が2箇所あります。2箇所とも記入しなさい。

- 1 2つの円  $C_1 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ ,  $C_2 : (x-5)^2 + (y-3)^2 = 1$  の共通接線の方程式をすべて求めよ。

- 2  $\triangle OAB$ において、辺  $OA$ ,  $OB$ ,  $AB$  の長さをそれぞれ  $s$ ,  $t$ ,  $u$  とする。また、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とおく。次の問いに答えよ。

問1  $\angle O$  の二等分線と辺  $AB$  の交点を  $Q$  とする。このとき、 $\overrightarrow{OQ}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $s$ ,  $t$  を用いて表せ。

問2  $\triangle OAB$  の内心を  $P$  とする。このとき、 $\overrightarrow{OP}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $s$ ,  $t$ ,  $u$  を用いて表せ。

□3 数列  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  の各項  $a_k$  が  $a_k > 2k$  を満たすとする。

このとき、2 以上の自然数  $n$  について、不等式

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) < n$$

が成り立つことを、数学的帰納法によって示せ。

4 関数  $f(x) = \frac{(x+4)^2(2x-1)}{3x^2}$  について、次の問いに答えよ。

問1  $y = f(x)$  の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べよ。

問2 関数  $g(x)$  を  $g(x) = f(x) - \left(\frac{2}{3}x + 5\right)$  で定める。このとき， $g(x) > 0$  となる  $x$  の範囲を求めよ。また， $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$  および  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  を求めよ。

問3  $y = f(x)$  のグラフの概形をかけ。

5 関数  $f(x) = \sqrt{x+2}$  について、次の問いに答えよ。

問1  $f(x)$  の逆関数  $f^{-1}(x)$  を求めよ。また、 $y = f^{-1}(x)$  のグラフをかけ。

問2 2つの曲線  $y = f(x)$  と  $y = f^{-1}(x)$  および  $x$  軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。