

1

$$\begin{array}{lllll} \boxed{\text{イ}} & -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} & \boxed{\text{ロ}} & \frac{2}{15} & \boxed{\text{ハ}} & \frac{1}{2} & \boxed{\text{ニ}} & -\frac{1}{2} & \boxed{\text{ホ}} & \frac{3}{2} \\ \boxed{\text{ヘ}} & 2 & \boxed{\text{ト}} & 3 & \boxed{\text{チ}} & \log_2 3 & \boxed{\text{リ}} & -3 & \boxed{\text{ヌ}} & -2 \end{array}$$

(1)

(i)

$$\int \frac{\log x}{x^2} dx = -\frac{\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx &= \left[\frac{1}{3} \sin^3 x \cos^2 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3} \sin^4 x \cos x dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \sin^3 x \cos^2 x + \frac{2}{15} \sin^5 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

(2)

$$(\text{左辺}) = \lim_{x \rightarrow 1} \left((ax + a) + \frac{a+b}{x-1} \right)$$

ここで, $a+b=0$ のとき,

$$(\text{左辺}) = \lim_{x \rightarrow 1} (ax + a) = 2a = 1$$

よって, $a=1/2, b=-1/2$.

(3)

$$\overrightarrow{AB} = (2, -1, 0), \overrightarrow{AC} = (2, 0, -1)$$

このとき,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{3}{2}$$

(4)

$$\tan 75^\circ = \tan(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ} = 2 + \sqrt{3}$$

(5)

$$8^x - 7 \times 2^x - 6 = 0 \Leftrightarrow (2^x + 2)(2^x + 1)(2^x - 3) = 0$$

$2^x > 0$ より $2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$.

(6)

ω について, $\omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$.

$$(\text{左辺}) = 3\omega^2 + 1 = -3(\omega + 1) + 1 = -3\omega - 2$$

よって, $a = -3, b = -2$.

2

$$\boxed{\lrcorner} \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1 \quad \boxed{\square} \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n \quad \boxed{\wedge} \frac{1}{3}$$

(1)

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} k + 1 = \frac{1}{2}(n-1) \cdot n + 1 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$$

(2)

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1 \right) + \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \right) \right) \cdot n = \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{2}n$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_n} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^3 + n} \frac{n^3 + 5n}{6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1 + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} \right) = \frac{1}{3}$$

3

$$\boxed{\text{イ}} \frac{1}{6} \quad \boxed{\text{ロ}} \frac{1}{9} \quad \boxed{\text{ハ}} \frac{1}{36} \quad \boxed{\text{ニ}} \frac{5}{72}$$

(1)

出た目が5の場合のみなので $1/6$.

(2)

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) の4通りより,

$$\frac{4}{6^2} = \frac{1}{9}$$

(3)

(1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 3, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (3, 1, 1) の6通りより,

$$\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

(4)

- 1回目と3回目に没収
- 2回目と3回目に没収
- 1回目と2回目と3回目に没収
- 3回目に没収

のいずれかであるから,

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{9} \times 2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \frac{1}{36} = \frac{5}{72}$$

4

$$\begin{array}{lll} \text{イ} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \text{ロ} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{ハ} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ \text{ニ} & \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} & \text{ホ} \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3 点は単位円上にあり, 行列 A^2, A^4 はそれぞれ原点回りに $120^\circ, 240^\circ$ 回転させる一次変換を表す. よって, 3 点の座標は, $(1/2, \sqrt{3}/2), (-1/2, \sqrt{3}/2), (-1/2, -\sqrt{3}/2)$.
また, この 3 点を頂点とする三角形の面積は,

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(1)

$$y' = -2xe^{-x^2}, \quad y'' = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$$

このとき、増減表は以下のとおり.

x	...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...
y'	+	+	+	0	-	-	-
y''	+	0	-	-	-	0	+
y	↗		↘	極大		↘	

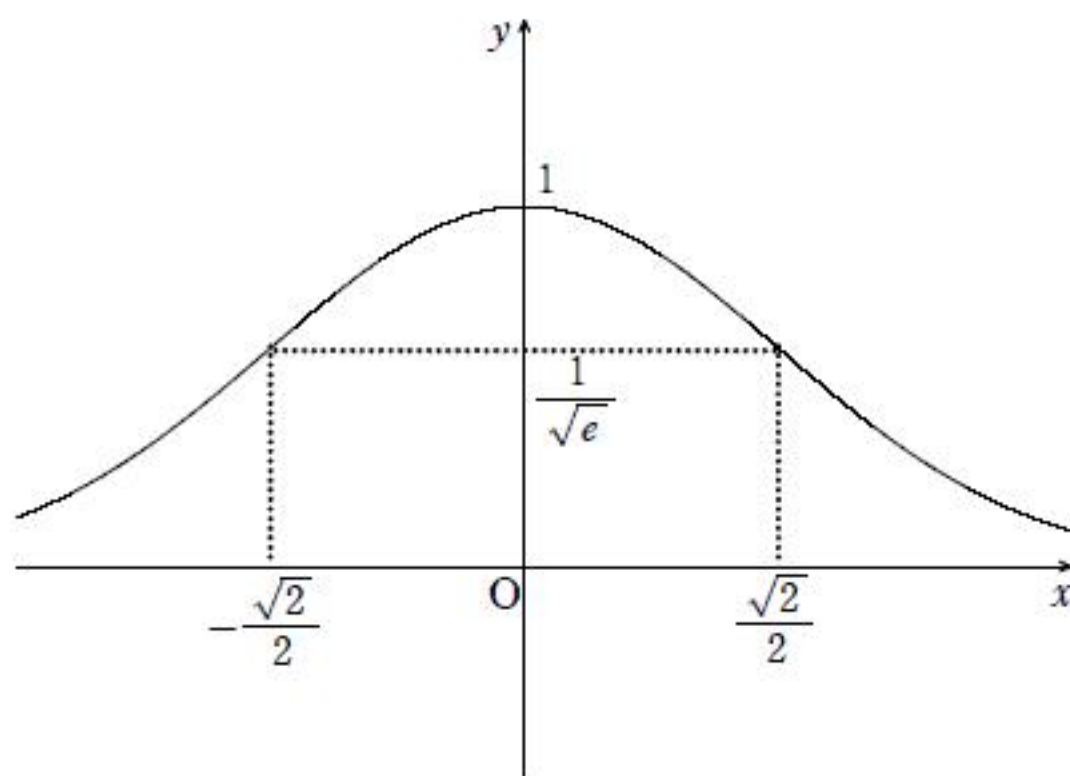
よって、極小値はなし.

極大値は $x = 0$ のとき 1.

また、変曲点は、 $(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}})$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$$

よって、グラフの概形は次のとおり.



(2)

$y = e^{-x^2}$ は原点对称. よって,

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx$$

また、 $0 \leq x \leq 1/\sqrt{2}$ において $e^{-x^2} \geq f(x)$ であることから,

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx \geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot (1 + e^{-\frac{1}{2}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって,

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx \geq \frac{e^{-\frac{1}{2}} + 1}{\sqrt{2}}$$

Q.E.D.

$X_n = 2^{3n-2} + 3^n$ とおく.

i) $n = 1$ のとき $X_1 = 2 + 3 = 5$ より, これは 5 の倍数となる.

ii) $n = k (k \in \mathbb{N})$ において, X_k が 5 の倍数であると仮定すると, $X_k = 5m (m \in \mathbb{Z})$ とおける.
このとき,

$$X_{k+1} = 2^{3(k+1)-2} + 3^{k+1} = 8(2^{3k-2} + 3^k) - 5 \cdot 3^k = 5(8m - 3^k)$$

よって, $n = k + 1$ のとき X_{k+1} は 5 の倍数となる.

i)ii) より, 数学的帰納法からすべての自然数 n で X_n が 5 の倍数となる.

Q.E.D.