

平成 20 年度 入学試験問題

数 学

【注意事項】

- 1 係員の指示があるまで、問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は 12 ページ、解答用紙は 4 枚あります。
- 3 落丁、乱丁、印刷の不鮮明な箇所などがあつたときは、手を挙げて係員に申し出ること。
- 4 各解答用紙(4 枚)の受験番号欄に受験番号を数字で記入すること。
- 5 解答は必ず各問題別の解答用紙の所定の欄に記入すること。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してかまいませんが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了時刻まで退室してはいけません。
- 8 解答用紙は持ち帰ってはいけません。その他は持ち帰ること。

1 (1)の問いに答えよ。また、(2)から(6)までの空欄をうめよ。

(1) 次の積分を求めよ。ただし、積分定数は省略してもよい。

(i) $\int \frac{\log x}{x^2} dx =$

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x dx =$

(2) 等式

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + b}{x - 1} = 1$$

が成り立つとき、定数 a, b の値は $a =$, $b =$ である。

(3) 座標空間内に3点 $A(0, 1, 1), B(2, 0, 1), C(2, 1, 0)$ をとる。 $\triangle ABC$ の面積は である。

(4) $\tan 75^\circ = a + \sqrt{b}$ を満たす整数 a, b の値は $a =$, $b =$ である。

(5) 方程式 $8^x - 7 \times 2^x - 6 = 0$ の解は $x =$ である。

(6) 1 の3乗根のうち、虚数であるものの1つを ω とする。このとき、 $\omega^5 + 2\omega^2 + 1 = a\omega + b$ を満たす整数 a, b の値は $a =$, $b =$ である。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

2 次のように自然数を階段状に並べる。

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 12 13 14 15
.....

上から n 段目 ($n = 1, 2, 3, \dots$) に並ぶ数のうち左端にあるものを a_n 、上から n 段目に並ぶ数の総和を S_n とするとき、以下の空欄をうめよ。

(1) $a_n =$

(2) $S_n =$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_n} \sum_{k=1}^n a_k =$

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

3 1個のサイコロを1回投げるたびに、出た目の数だけ石をもらえとする。ただし、出た目の数だけ石をもらった後、手持ちの石がちょうど5個ならばただちにすべての石を没収されてしまうものとする。なお、はじめは石を1つも持っていない。このとき以下の空欄をうめよ。

- (1) サイコロを1回投げた後に石が没収される確率は である。
- (2) サイコロを2回投げた後にはじめて石が没収される確率は である。
- (3) サイコロを3回投げた後にはじめて石が没収される確率は である。
- (4) サイコロを3回投げた後に石を1つも持っていない確率は である。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

4

座標平面上の点の移動を考える。以下の空欄をうめよ。

原点のまわりの角 60° の回転移動を表す行列を A とすると $A =$ である。行列 A, A^2, A^4 で表される移動により点 $(1, 0)$ はそれぞれ, , , に移る。移動により得られた 3 点を頂点とする三角形の面積は である。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

5

関数 $y = e^{-x^2}$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) 関数の増減、極値、曲線の凹凸、変曲点を調べて、そのグラフをかけ。
- (2) グラフ上の2点 $(0, 1)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}})$ を結ぶ直線を $y = f(x)$ とする。このとき、 $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ において $e^{-x^2} \geq f(x)$ であることを用いて、次の不等式を示せ。

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx \geq \frac{e^{-\frac{1}{2}} + 1}{\sqrt{2}}$$

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

6 n を自然数とすると、 $2^{3n-2} + 3^n$ は 5 の倍数であることを数学的帰納法によって証明せよ。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)