

1

$$\boxed{\text{イ}} \quad \frac{2}{1-x^2} \quad \boxed{\text{ロ}} \quad -2xe^{-x^2} \quad \boxed{\text{ハ}} \quad \frac{1}{3} \quad \boxed{\text{ニ}} \quad 6\log 2 - \frac{4}{3}$$

$$\boxed{\text{ホ}} \quad \frac{3}{2} \quad \boxed{\text{ヘ}} \quad \frac{\pi}{4} \quad \boxed{\text{ト}} \quad \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \quad \boxed{\text{チ}} \quad 1+2\sqrt{5} \quad \boxed{\text{リ}} \quad 1-2\sqrt{5}$$

[解説]

$$\begin{aligned} (1) \quad (i) \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{1-x}{1+x} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' \\ &= \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2}{1-x^2} \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \frac{dy}{dx} = (-x^2)' e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$$

$$(2) \quad (i) \quad (\text{与式}) = \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

(ii) 部分積分を行って,

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \int_1^2 (x^3 - x)' \log x dx = \left[(x^3 - x) \log x \right]_1^2 - \int_1^2 (x^2 - 1) dx \\ &= 6\log 2 - \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^2 \\ &= 6\log 2 - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \sqrt{x}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}(x+3-x)}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{3}{2}$$

(4) 2つのベクトルのなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とすると,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Leftrightarrow 3 = 3\sqrt{2} \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \therefore \theta &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(5) 与式を変形すると,

$$\sin \theta = 1 - 2\sin^2 \theta \Leftrightarrow (\sin \theta + 1)(2\sin \theta - 1) = 0$$

$$\text{今 } 0 \leq \sin \theta \leq 1 \text{ なので, } \sin \theta = \frac{1}{2} \text{ となり, } \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

(6) $x+2y=k$ とおくと, これが円 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ に接する時に k は最大, 最小をとる。このとき円の中心 $(1, 0)$ と直線 $x+2y=k$ の距離が円の半径 2 となるので,

$$\frac{|1+0-k|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 2 \Leftrightarrow 1-k = \pm 2\sqrt{5} \quad \therefore k = 1 \pm 2\sqrt{5}$$

よって, 最大値は $1+2\sqrt{5}$, 最小値は $1-2\sqrt{5}$

2

$$\boxed{\text{イ}} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{ロ}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{ハ}} \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 & -2 \cdot 2^n + 2 \\ 3 \cdot 2^n - 3 & -2 \cdot 2^n + 3 \end{pmatrix}$$

【解説】

(1) 与えられた条件から,

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore A &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad (P^{-1}AP)^n &= P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \therefore A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^n - 2 & -2 \cdot 2^n + 2 \\ 3 \cdot 2^n - 3 & -2 \cdot 2^n + 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3

イ

240

ロ

144

ハ

144

ニ

30

[解説]

- (1) **a,i** を 1 つの文字として並べる方法は $5!$ 通り。
 さらに、**a,i** の順序を考慮すると $5! \times 2 = 240$ 通り。
- (2) 両端の並べ方は $3 \times 2 = 6$ 通りで、両端以外の並べ方が $4! = 24$ 通り。
 よって、 $6 \times 24 = 144$ 通り。
- (3) 子音だけ並べるとその並べ方は $3! = 6$ 通り。 ○子○子○子○
 母音を図の○の中に入れるような並べ方は $4 \times 3 \times 2 = 24$ 通り。
 よって、 $6 \times 24 = 144$ 通り。
- (4) **a,i,z,u** をこの順番に並べた後に、両端あるいは文字間に **d** を入れる方法は 5 通り。
 さらに、その文字列の両端あるいは間に **g** を入れる方法は 6 通り。
 よって、 $5 \times 6 = 30$ 通り。

$$\boxed{\text{イ}} \quad \frac{1}{4} \quad \boxed{\text{ロ}} \quad \frac{3}{32} \quad \boxed{\text{ハ}} \quad \frac{9}{64}$$

[解説]

(1) 2回目に、1回目に移動した方角と逆の方角に進む確率を求めればよい。

よって、求める確率は $\frac{1}{4}$

(2) 移動の仕方は $E \rightarrow D \rightarrow D \rightarrow A$, $E \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow A$, $E \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow A$, $E \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow A$ の4通り。

Pが今いる位置にとどまる確率は、PがB, D, F, Hにいるときは $\frac{1}{4}$ であり、

A, C, G, Iにいるとき $\frac{2}{4}$ であることを考慮すると、求める確率は

$$2 \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \right) + 2 \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \right) = \frac{3}{32}$$

(3) 4回目の試行後にEにいるとき、3回目の試行後にはB, D, F, Hのいずれかにいるので、その確率を考える。

(2)より、3回目の試行後に端A, C, G, Iのいずれかにいる確率は $4 \times \frac{3}{32} = \frac{3}{8}$

また3回目の試行後にEにいる場合は、Pが

$E \rightarrow (B, D, F, H \text{ のいずれか}) \rightarrow (\text{その位置にとどまる}) \rightarrow E$
と動くときであるので、

3回目の試行後にPがEにいる確率は、 $4 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

以上より、3回目にB, D, F, Hのいずれかにいる確率は、 $1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$

よって、4回目にEにいる確率は $\frac{9}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$

(1) (a, e^{-a}) における接線の方程式は

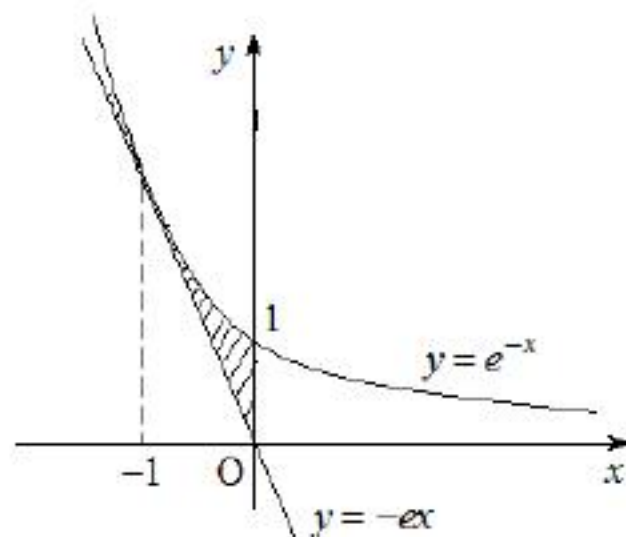
$$y = -e^{-a}(x-a) + e^{-a} = -e^{-a}x + e^{-a}(a+1)$$

これが原点を通る時, $a = -1$

よって, 原点を通る接線の方程式は $y = -ex$ であり, 求める面積は

$$\int_{-1}^0 (e^{-x} + ex) dx = \left[-e^{-x} + \frac{e}{2}x^2 \right]_{-1}^0 = \frac{e}{2} - 1$$

(答) $\frac{e}{2} - 1$



(2) 求める体積は,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \pi (e^{-2x} - e^2 x^2) dx &= \pi \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} - \frac{e^2}{3} x^3 \right]_{-1}^0 \\ &= \left(\frac{e^2}{6} - \frac{1}{2} \right) \pi \end{aligned}$$

(答) $\left(\frac{e^2}{6} - \frac{1}{2} \right) \pi$

(1) 漸化式を用いて計算すると、

$$(\text{答}) \quad a_2 = \frac{2}{5}, a_3 = \frac{3}{7}, a_4 = \frac{4}{9}$$

(2) (1)の答より、 $a_n = \frac{n}{2n+1}$ と予測できる。これを数学的帰納法で示す。

$n=1$ の時正しい。

$n=k$ (k は自然数)の時に成り立つとする。このとき、

$$a_{k+1} = \frac{1 - \frac{k}{2k+1}}{3 - \frac{4k}{2k+1}} = \frac{k+1}{2k+3}$$

となるので、 $n=k+1$ のときも成り立つ。

以上より、 $a_n = \frac{n}{2n+1}$ であることが示された。

(証明終)