

1

〔解答〕

$$\text{イ} \quad \frac{1}{4}(e^2+1) \quad \text{ロ} \quad \frac{1}{4}\sin^4 x \quad \text{ハ} \quad \frac{2}{5}(2x-1)^{-\frac{4}{5}} = -2, 3$$

$$\text{ホ} \quad 6 \quad \text{ヘ} \quad \frac{4}{3} \quad \text{ト} \quad 8-2\pi$$

〔解説〕

(1)

(i)

$$\begin{aligned} \int_1^e x \log x dx &= \int_1^e \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' \log x dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 \log x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \int_1^e \frac{1}{2} x dx \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_1^e \\ &= \frac{1}{4} (e^2 + 1) \end{aligned}$$

となる。ただし、積分定数は省略した。

(ii)

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos x dx &= \int \sin^2 x (\sin x)' dx \\ &= \frac{1}{4} \sin^4 x \end{aligned}$$

となる。ただし、積分定数は省略した。

(2)

$y = \sqrt[3]{2x-1}$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (2x-1)^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3} (2x-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 \\ &= \frac{2}{3} (2x-1)^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned} 2^{x^2-1} 4^{x+2} &= 8^{x+3} \\ \Leftrightarrow 2^{x^2-1} (2^2)^{x+2} &= (2^3)^{x+3} \\ \Leftrightarrow 2^{x^2-1} \cdot 2^{2x+4} &= 2^{3x+9} \\ \Leftrightarrow 2^{x^2+2x+3} &= 2^{3x+9} \\ \Leftrightarrow x^2+2x+3 &= 3x+9 \\ \Leftrightarrow (x-3)(x+2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -2, 3 \end{aligned}$$

である。

(4)

方程式 $\log_3(x-5) = 2 - \log_3(x+3)$ について真数条件より

$$\begin{cases} x-5 > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5$$

である。このもとで

$$\begin{aligned} \log_3(x-5) &= 2 - \log_3(x+3) \\ \Leftrightarrow \log_3(x-5)(x+3) &= 2 \\ \Leftrightarrow (x-5)(x+3) &= 3^2 \\ \Leftrightarrow (x-6)(x+4) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 6 \quad (\because x > 5) \end{aligned}$$

となる。

(5)

2 直線 $y=3x$, $y=\frac{x}{3}$ の x 正方向とのなす角をそれぞれ α, β ($0 \leq \alpha, \beta < \pi$) とおくと

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= 3 \\ \tan \beta &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となり、このとき $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ となるから

$$\theta = \alpha - \beta$$

であり

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{3}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{3}} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

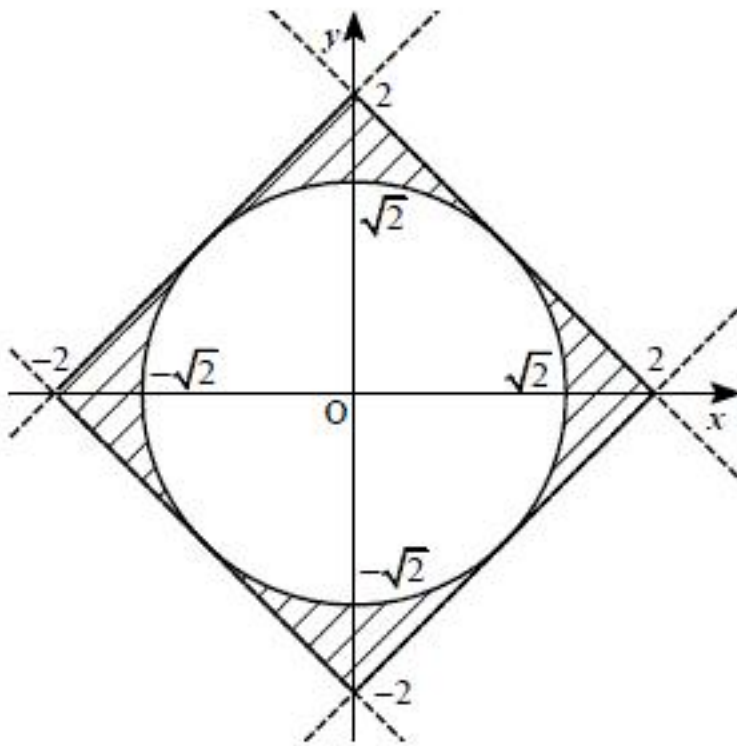
となる。

(6)

連立方程式

$$\begin{cases} |x| + |y| \leq 2 \\ x^2 + y^2 \geq 2 \end{cases}$$

の表す図形は下図の斜線部のようになる。



よって、この領域の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 - \pi (\sqrt{2})^2 = 8 - 2\pi$$

となる。

【解答】

$$イ \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \square \quad \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 8 & 3-16n \\ 1 & 2-2n \end{pmatrix}$$

【解説】

(1)

$$\det B = ab$$

であり、 $a \neq 0, b \neq 0$ より $\det B \neq 0$ となるから、行列 B は逆行列をもち

$$B^{-1} = \frac{1}{ab} \begin{pmatrix} b & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} AB^{-1} &= \begin{pmatrix} a & 3b \\ 0 & b \end{pmatrix} \frac{1}{ab} \begin{pmatrix} b & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ab} \begin{pmatrix} ab & 2ab \\ 0 & ab \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} (AB^{-1})^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (AB^{-1})^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから、すべての自然数 n に対して

$$(AB^{-1})^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つと推測される。このことを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

(1)の結果より①は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき①が成り立つと仮定するとき

$$\begin{aligned} (AB^{-1})^{k+1} &= (AB^{-1})^k (AB^{-1}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから、 $n=k+1$ のときも①が成り立つ。

以上、[1]、[2]より、①はすべての自然数 n について成り立つことが示された。よって

$$(AB^{-1})^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

(3)

$$\det (AB^{-1})^n = 1 \neq 0$$

より、行列 $(AB^{-1})^n$ は逆行列をもち

$$\left\{ (AB^{-1})^n \right\}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。よって、 $P(AB^{-1})^n = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ が成り立つとき、両辺に $\left\{ (AB^{-1})^n \right\}^{-1}$ を右から乗じて

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left\{ (AB^{-1})^n \right\}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 3-16n \\ 1 & 2-2n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

$$\text{イ} \quad -\frac{7}{5} \quad \text{ロ} \quad \frac{2}{5} \quad \text{ハ} \quad -\frac{2\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} = \frac{4|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - 4(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{b}|^2}$$

〔解説〕

(1)

 $\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (1, 3)$ であるとき

$$|\vec{a}| = \sqrt{5}, |\vec{b}| = \sqrt{10}, \vec{a} \cdot \vec{b} = 7$$

となるから

$$\begin{aligned} |2\vec{a} + t\vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 + 4t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 \\ &= 4 \cdot 5 + 4t \cdot 7 + t^2 \cdot 10 \\ &= 10t^2 + 28t + 20 \\ &= 10\left(t + \frac{7}{5}\right)^2 + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

である。よって、 $|2\vec{a} + t\vec{b}|^2$ は

$$t = -\frac{7}{5} \text{ のとき最小値 } \frac{2}{5}$$

をとる。

(2)

 $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ であるとき

$$\begin{aligned} |2\vec{a} + t\vec{b}|^2 &= 4|\vec{a}|^2 + 4t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 \left(t + \frac{2\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right)^2 + \frac{4|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - 4(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{b}|^2} \quad (\because |\vec{b}| \neq 0) \end{aligned}$$

となるから、 $|2\vec{a} + t\vec{b}|^2$ は

$$t = -\frac{2\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \text{ のとき最小値 } \frac{4|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - 4(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{b}|^2}$$

をとる。

〔解答〕

$$\text{イ} \quad \frac{1}{2} \quad \text{ロ} \quad \frac{3}{8} \quad \text{ハ} \quad \frac{3(1+\sqrt{5})}{4} = \frac{35}{64}$$

〔解説〕

(1)

コインを投げたとき、表、裏の出方は同様に確からしいとする。コインを2回投げた結果、Pが(1, 1)にあるのは、表と裏がそれぞれ1回ずつ出るときであるから、そのようになる確率は

$${}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

である。

(2)

コインを4回投げた結果、Pが(2, 2)にあるのは、表と裏がそれぞれ2回ずつ出るときであるから、そのようになる確率は

$${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

である。

(3)

コインを3回投げたときに到達しうる点Pの座標は(3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)である。このそれぞれの場合における2点O, P間の距離OPの値と起こる確率は以下ようになる。

点Pの座標	OP	確率
(3, 0)	3	${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{8}$
(2, 1)	$\sqrt{5}$	${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$
(1, 2)	$\sqrt{5}$	${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$
(0, 3)	3	${}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

よって、OPの期待値は

$$3 \times \frac{1}{8} + \sqrt{5} \times \frac{3}{8} + \sqrt{5} \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3(1+\sqrt{5})}{4}$$

である。

(4)

コインを7回投げた結果、到達しうる点Pの座標は

$$(7, 0), (6, 1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6), (0, 7)$$

である。このうち距離OP=5となるのは(3, 4), (4, 3)のときであるから、このようになる確率は

$${}_7C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_7C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{35}{64}$$

である。

(1)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x-2)e^x \text{ とおくと} \\
 f'(x) &= 1 \cdot e^x + (x-2) \cdot e^x \\
 &= (x-1)e^x \\
 f''(x) &= 1 \cdot e^x + (x-1) \cdot e^x \\
 &= xe^x
 \end{aligned}$$

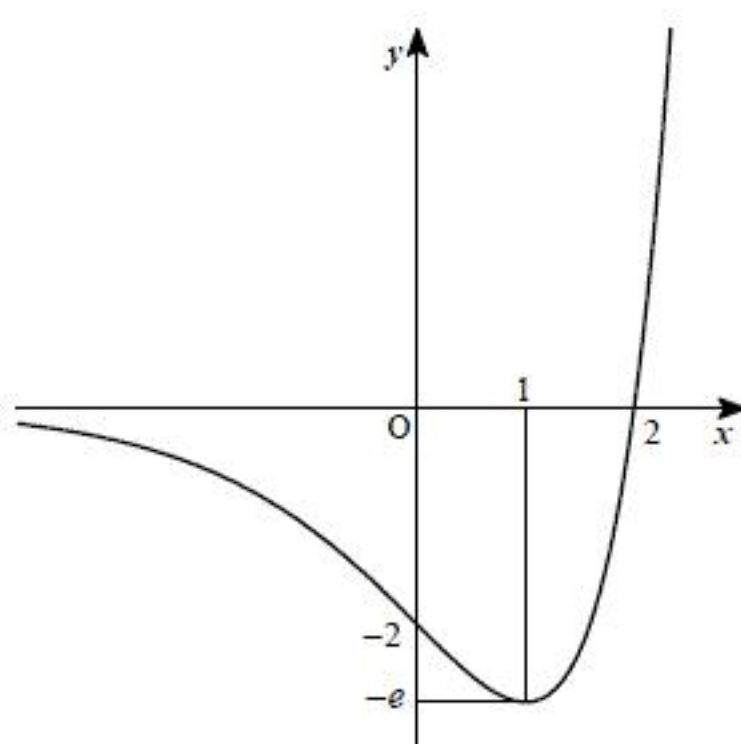
となるから、関数 $y = f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\searrow$	$-e$	$\nearrow$

また

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{e^{-x}} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t-2}{e^t} \\
 &= 0 \left(\because \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = 0 \right)
 \end{aligned}$$

であるから、関数 $y = f(x)$ のグラフ C は下図のようになる。



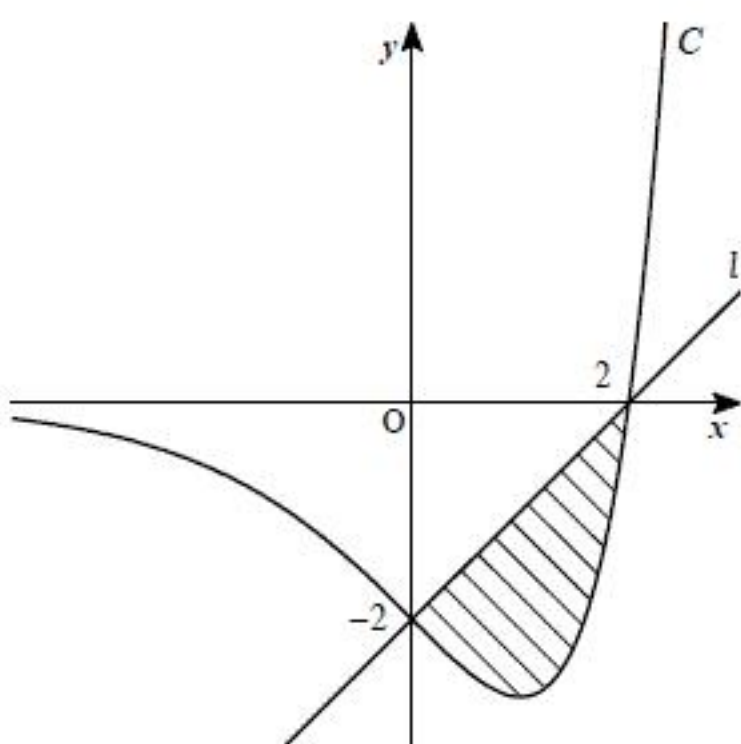
(答) $y = (x-2)e^x$ の増減・ C の凹凸：前表
 極値： $-e$ ($x=1$ のとき)
 変曲点： $(0, -2)$
 C の概形：前図

(2)

C と x 軸の共有点は $(2, 0)$ と C の変曲点 $(0, -2)$ を通る直線 l の方程式は

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{0 - (-2)}{2 - 0} x - 2 \\
 &\Leftrightarrow y = x - 2
 \end{aligned}$$

である。よって、 C, l で囲まれた部分は下図の斜線部のようになる。



よって、この部分の面積は

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 \{(x-2) - (x-2)e^x\} dx &= \int_0^2 (x-2)(1-e^x) dx \\
 &= \int_0^2 (x-2)(x-e^x)' dx \\
 &= \left[(x-2)(x-e^x) \right]_0^2 - \int_0^2 (x-e^x) dx \\
 &= -2 - \left[\frac{x^2}{2} - e^x \right]_0^2 \\
 &= e^2 - 5
 \end{aligned}$$

である。

(答) $e^2 - 5$

(1)

n を自然数とするとき、 $n > 0$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} &< \frac{1}{n} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} &< \frac{1}{n(n+1)} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} &< \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} &< -\frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

となることが示された。

(証明終)

(2)

すべての自然数 n に対して、不等式

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} < 2 - \frac{1}{n+1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} &= \frac{5}{4} \\ 2 - \frac{1}{2} &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

より

$$1 + \frac{1}{2^2} < 2 - \frac{1}{2}$$

となり、 $\textcircled{1}$ は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定するとき

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+2)^2} < 2 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+2)^2}$$

となり、(1) の結果を用いて

$$-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+2)^2} < -\frac{1}{k+2}$$

であることから

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+2)^2} < 2 - \frac{1}{k+2}$$

となり、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ は成り立つ。

以上、[1], [2] より、すべての自然数 n に対して不等式

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} < 2 - \frac{1}{n+1}$$

が成り立つことが示された。

(証明終)