

平成 22 年度 入学試験問題

数 学

【注意事項】

- 1 係員の指示があるまで、問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は 12 ページ、解答用紙は 4 枚あります。
- 3 落丁、乱丁、印刷の不鮮明な箇所などがあったときは、手を挙げて係員に申し出ることに。
- 4 各解答用紙(4 枚)の受験番号欄に受験番号を数字で記入すること。
- 5 解答は必ず各問題別の解答用紙の所定の欄に記入すること。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してかまいませんが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了時刻まで退室してはいけません。
- 8 解答用紙は持ち帰ってはいけません。その他は持ち帰ること。

1

(1)の問いに答えよ。また、(2)から(6)までの空欄をうめよ。

(1) 次の積分を求めよ。ただし、積分定数は省略してもよい。

(i) $\int_1^e x \log x \, dx =$

(ii) $\int \sin^3 x \cos x \, dx =$

(2) $y = \sqrt[5]{2x-1}$ のとき、 $\frac{dy}{dx} =$ である。

(3) 方程式 $2^{x^2-1} 4^{x+2} = 8^{x+3}$ の解は $x =$ である。

(4) 方程式 $\log_3(x-5) = 2 - \log_3(x+3)$ の解は $x =$ である。

(5) 2直線 $y = 3x$ と $y = \frac{x}{3}$ のなす角を θ とするとき、 $\tan \theta =$

である。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

(6) 座標平面上で次の連立不等式

$$\begin{cases} |x| + |y| \leq 2 \\ x^2 + y^2 \geq 2 \end{cases}$$

の表す領域の面積は である。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

2 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b \end{pmatrix}$ に対して以下の問いに答えよ。

ただし, n を自然数とし, $a \neq 0$, $b \neq 0$ とする。

(1) AB^{-1} を求めよ。 イ

(2) $(AB^{-1})^n$ を求めよ。 ロ

(3) $P(AB^{-1})^n = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ が成り立つとき, 行列 P を求めよ。 ハ

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

3

以下の空欄をうめよ。

(1) 2つのベクトル $\vec{a}=(1, 2)$, $\vec{b}=(1, 3)$ について, $|2\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は
 $t=$ のとき最小値 をとる。

(2) 零ベクトルでない2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について, $|2\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は
 $t=$ のとき最小値 をとる。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

4 座標平面上を動く点 P が、はじめ原点 O にある。コインを投げて表が出たときには P は x 軸の正の向きに 1 進み、裏が出たときには P は y 軸の正の向きに 1 進むとする。以下の問いに答えよ。

(1) コインを 2 回投げた結果、 P が $(1, 1)$ にある確率を求めよ。 イ

(2) コインを 4 回投げた結果、 P が $(2, 2)$ にある確率を求めよ。 ロ

(3) コインを 3 回投げた後の 2 点 O, P 間の距離 OP の期待値を求めよ。

ハ

(4) コインを 7 回投げた結果、距離 $OP = 5$ となる確率を求めよ。 ニ

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

5

関数 $y = (x - 2)e^x$ のグラフを C とするとき、次の問いに答えよ。(結論に至る過程も記述すること。)

- (1) 関数 $y = (x - 2)e^x$ の増減、極値、 C の凹凸、変曲点を調べて、 C を座標平面上に描け。ただし、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = 0$ を用いてもよい。
- (2) C と x 軸の共有点と、 C の変曲点を通る直線を l とおく。 C と l で囲まれた部分の面積を求めよ。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

6 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とすると、次の不等式を証明せよ。

$$-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} < -\frac{1}{n+1}$$

(2) (1)の結果を利用して、すべての自然数 n に対して次の不等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} < 2 - \frac{1}{n+1}$$

(計 算 用 紙)