

1

- (1)

イ	$-\frac{1}{2}\cos x^2$	ロ	e^2+1
---	------------------------	---	---------
- (2)

ハ	$\frac{1}{4}$
---	---------------
- (3)

ニ	$-\frac{\pi}{6}$
---	------------------
- (4)

ホ	$\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -48 & 0 \end{pmatrix}$
---	---
- (5)

ヘ	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	ト	$\sqrt{3}$
---	----------------------	---	------------

【解説】

(1)

(i)

$$x^2 = t \text{ とおくと } xdx = \frac{1}{2}dt \text{ より}$$

$$\begin{aligned}\int x \sin x^2 dx &= \int \frac{\sin t}{2} dt \\ &= -\frac{1}{2} \cos t + C \\ &= -\frac{1}{2} \cos x^2 + C\end{aligned}$$

となる。ただし C は積分定数である。

(ii)

$$\begin{aligned}\int_0^2 x e^x dx &= \int_0^2 x (e^x)' dx \\ &= [x e^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx \\ &= 2e^2 - [e^x]_0^2 \\ &= e^2 + 1\end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n}{3^{n+1} + 4^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^n + \frac{1}{4}}{\left(\frac{3}{4} \right)^{n+1} + 1} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned}3 \sin x + \cos 2x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3 \sin x + 1 - 2 \sin^2 x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 \sin x + 1)(\sin x - 2) &= 0\end{aligned}$$

ここで $\sin x \neq 2$ より

$$\begin{aligned}2 \sin x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ から $x = -\frac{\pi}{6}$ である。

(4)

$$\begin{aligned}A+B &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, A-B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \text{ より} \\ (A+B)(A-B) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -48 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

(5)

$$\overline{\text{OA}} = (1, 2, 1), \overline{\text{OB}} = (2, 2, 0)$$

より,

$$\begin{aligned}|\overline{\text{OA}}| &= \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}, |\overline{\text{OB}}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}, \\ \overline{\text{OA}} \cdot \overline{\text{OB}} &= 2+4=6\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}\cos \angle \text{AOB} &= \frac{\overline{\text{OA}} \cdot \overline{\text{OB}}}{|\overline{\text{OA}}| |\overline{\text{OB}}|} \\ &= \frac{6}{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}\sin \angle \text{AOB} &= \sqrt{1 - \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

から $\triangle \text{AOB}$ の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} |\overline{\text{OA}}| |\overline{\text{OB}}| \sin \angle \text{AOB} &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

(1)	イ	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$
(2)	ロ	$(3, 3)$
(3)	ハ	$(2^n, 2^{n+1})$
(4)	ニ	$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4-2^n & -2+2^{n+1} \\ 2-2^{n+1} & -1+2^{n+2} \end{pmatrix}$

【解説】

(1)

A により $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ はそれ自身に移るので

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。また A により $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ に移るので

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

となる。以上から

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow A &= \frac{1}{4-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

(2)

R の座標を (x, y) とおくと

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{14+4} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

(3)

Q_n の座標が $\begin{pmatrix} 2^n \\ 2^{n+1} \end{pmatrix}$ であることを数学的帰納法を用いて証明する。

[1] $n=1$ のとき

問題文から Q_1 の座標は $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ なので成立する。

[2] $n=k$ で成り立つと仮定すると

Q_k の座標は $\begin{pmatrix} 2^k \\ 2^{k+1} \end{pmatrix}$ となる。このとき Q_{k+1} の座標は

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k \\ 2^{k+1} \end{pmatrix} &= 2^k \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 2^k \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{k+1} \\ 2^{k+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり $n=k+1$ でも成立することが分かる。

以上[1], [2] から Q_n の座標は $\begin{pmatrix} 2^n \\ 2^{n+1} \end{pmatrix}$ となる。

(4)

(3)の結果から

$$A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

となる。また(1)から

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow A^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \dots \\ \Rightarrow A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} A^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 2^n \\ 1 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow A^n &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2^n \\ 1 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4-2^n & -2+2^{n+1} \\ 2-2^{n+1} & -1+2^{n+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(1) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{イ} & \frac{5}{9} \\ \hline \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ロ} & \frac{1}{36} \\ \hline \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ハ} & \frac{7}{216} \\ \hline \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ニ} & \frac{1}{18} \\ \hline \end{array}$$

〔解説〕

(1)

全事象は $6^3 = 216$ 通りである。出た目が全て異なる事象の数は 1~6 までの数のうち 3 つ選んで並べる事象と等しいので求める確率は

$$\frac{{}_6P_3}{216} = \frac{5}{9}$$

となる。

(2)

出た目の和が 5 となる 3 つの数字の出方は (1, 1, 3), (1, 2, 2) の 2 パターンである。それぞれに対して 3 通りの出方があるので求める確率は

$$\frac{3+3}{216} = \frac{1}{36}$$

となる。

(3)

3 つの目の出方は (1, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 2, 2) のいずれかとなる。(1, 1, 2), (1, 2, 2) は 3 通り, (2, 2, 2) は 1 通りの目の出方があるので求める確率は

$$\frac{3+3+1}{216} = \frac{7}{216}$$

となる。

(4)

目の出方は (2, 5, 6), (3, 4, 5) のいずれかである。それぞれに対して $3! = 6$ 通りの目の出方があるので求める確率は

$$\frac{6+6}{216} = \frac{1}{18}$$

となる。

4

$$(1) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{イ} & \frac{4}{21}\pi a^7 \\ \hline \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ロ} & \frac{4}{15}\pi a^5 \\ \hline \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \text{ハ} & \frac{7}{5} \\ \hline \end{array}$$

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^a \left\{ (a^2 x)^2 - (x^3)^2 \right\} dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} a^4 x^3 - \frac{1}{7} x^7 \right]_0^a \\ &= \frac{4}{21} \pi a^7 \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$y = x^3 \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{3}}$$

と

$$y = a^2 x \Leftrightarrow x = \frac{1}{a^2} y$$

より

$$\begin{aligned} W &= \pi \int_0^{a^3} \left\{ \left(y^{\frac{1}{3}} \right)^2 - \left(\frac{1}{a^2} y \right)^2 \right\} dy \\ &= \pi \left[\frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{3a^4} y^3 \right]_0^{a^3} \\ &= \frac{4}{15} \pi a^5 \end{aligned}$$

となる。

(3)

 $m = a^2$ より

$$\begin{aligned} \frac{mW}{V} &= \frac{a^2 \cdot \frac{4}{15} \pi a^5}{\frac{4}{21} \pi a^7} \\ &= \frac{7}{5} \end{aligned}$$

となる。

(1)

真数条件より $x > 0$ である。また

$$y' = \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x \log x}{x^4} \\ = \frac{1 - 2 \log x}{x^3}$$

となる。したがって $y' = 0$ のとき

$$1 - 2 \log x = 0 \\ \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$

となる。またこのとき $y = \frac{1}{2e}$ である。

$$y'' = \frac{-\frac{2}{x}x^3 - (1 - 2 \log x) \cdot 3x^2}{x^6} \\ = \frac{-5 + 6 \log x}{x^4}$$

より $y'' = 0$ のとき

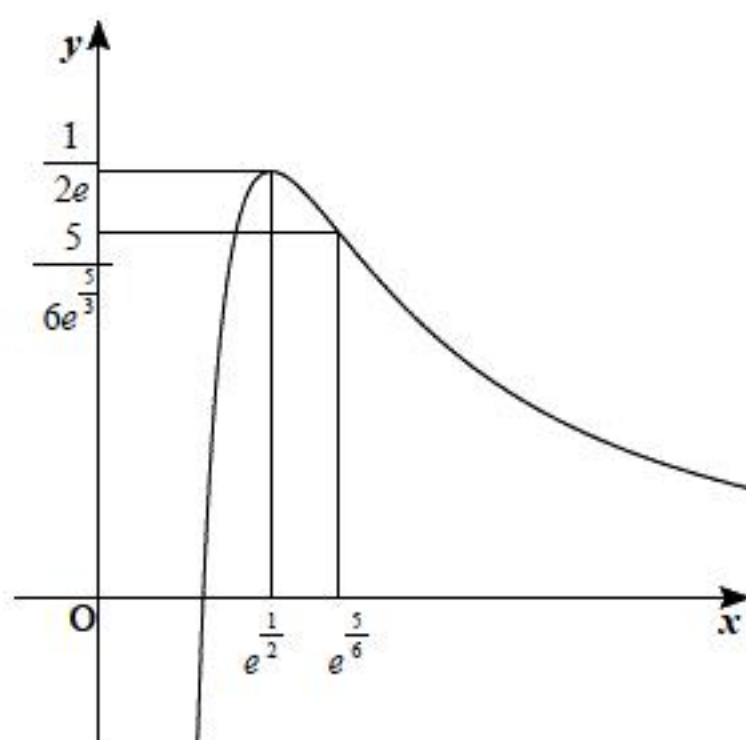
$$-5 + 6 \log x = 0 \\ \Leftrightarrow x = e^{\frac{5}{6}}$$

となる。またこのとき $y = \frac{5}{6e^{\frac{5}{3}}}$ となる。また $\lim_{x \rightarrow +0} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$ から増減表を書くと以下の

ようになる。

x	0	...	$e^{\frac{1}{2}}$	...	$e^{\frac{5}{6}}$	...	$(+\infty)$
y'		+	0	-	-	-	
y''		-	-	-	0	+	
y	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	$\frac{5}{6e^{\frac{5}{3}}}$	$\searrow$	0

これを元に図を書くと以下のようになる。



(答) 前図

(2)

真数条件より $x > 0$ である。

$$\log x = ax^2 \\ \Leftrightarrow a = \frac{\log x}{x^2}$$

であるので、(1)で求めた図と $y = a$ の交点の数が解の数と一致する。したがって上図から

$a \leq 0$, $a = \frac{1}{2e}$ のとき解の数は 1 個,

$0 < a < \frac{1}{2e}$ のとき解の数は 2 個,

$a > \frac{1}{2e}$ のとき解の数は 0 個

となる。

(答) $a \leq 0$, $a = \frac{1}{2e}$ のとき 1 個

$0 < a < \frac{1}{2e}$ のとき 2 個

$a > \frac{1}{2e}$ のとき 0 個

(1)

[1] $n=1$ のとき

$$S_1 = 1^1 = 1$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1$$

より成立する。

[2] $n=k$ で成り立つと仮定すると

$$S_k = 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

が成立する。このとき

$$\begin{aligned}
 S_{k+1} &= 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 \\
 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
 &= (k+1) \cdot \frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6} \\
 &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
 &= \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6} \\
 &= \frac{(k+1)(k+2)\{2(k+1)+1\}}{6}
 \end{aligned}$$

となり $n=k+1$ でも成立する。以上よりすべての自然数 n に対し、

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

となることが示された。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned}
 S_{3n} + n &= \frac{3n(3n+1)(6n+1)}{6} + n \\
 &= \frac{n(3n+1)(6n+1) + 2n}{2} \\
 &= \frac{n(18n^2 + 9n + 3)}{2} \\
 &= \frac{3n(6n^2 + 3n + 1)}{2}
 \end{aligned}$$

となる。つまり n または $6n^2 + 3n + 1$ が偶数となるときこれは 3 の倍数となる。ここで n が偶数のときは明らかに 3 の倍数であるので、 n が奇数であるときを調べると、

$$6n^2 + 3n + 1 = 3n(2n+1) + 1$$

とかけ、 $3, n, 2n+1$ が奇数であることから、確かに、 $6n^2 + 3n + 1$ は偶数とわかる。

以上より $S_{3n} + n$ が 3 の倍数であることが示せた。

(証明終)