

平成 23 年度 入学試験問題

数 学

【注意事項】

- 1 係員の指示があるまで、問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は 12 ページ、解答用紙は 4 枚あります。
- 3 落丁、乱丁、印刷の不鮮明な箇所などがあったときは、手を挙げて係員に申し出ることに。
- 4 各解答用紙(4 枚)の受験番号欄に受験番号を数字で記入すること。
- 5 解答は必ず各問題別の解答用紙の所定の欄に記入すること。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してかまいませんが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了時刻まで退室してはいけません。
- 8 解答用紙は持ち帰ってはいけません。その他は持ち帰ること。

1

(1), (2)の問いに答えよ。また, (3)から(5)までの空欄をうめよ。

(1) 次の積分を求めよ。ただし, 積分定数は省略してもよい。

(i) $\int x \sin x^2 dx =$

(ii) $\int_0^2 x e^x dx =$

(2) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 4^n}{3^{n+1} + 4^{n+1}} =$$

(3) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $3 \sin x + \cos 2x + 1 = 0$ のとき,

$x =$ である。

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ のとき,

$(A + B)(A - B) =$ である。

(5) O を原点とする座標空間に 2 点 A(1, 2, 1), B(2, 2, 0) をとる。このと

き, $\cos \angle AOB =$, $\triangle AOB$ の面積は である。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

2 点 $P(2, 1)$ を点 P 自身に移し、点 $Q(1, 2)$ を点 $Q_1(2, 4)$ に移す 1 次変換 f を表す行列を A とする。以下の問いに答えよ。ただし、 n を自然数とする。

(1) A を求めよ。

(2) f により点 R が点 $(4, 5)$ に移されるとき、点 R の座標を求めよ。

(3) A^n で表される 1 次変換により点 Q が移される点を Q_n とする。点 Q_n の座標を求めよ。

(4) A^n を求めよ。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

3

1 個のサイコロを 3 回投げるとき、以下の問いに答えよ。

(1) 出た目がすべて異なる確率を求めよ。

(2) 出た目の和が 5 となる確率を求めよ。

(3) 出た目の最大値が 2 となる確率を求めよ。

(4) 出た目の積が 60 となる確率を求めよ。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

- 4 a を正の定数とする。原点を O とし、曲線 $y = x^3$ 上に点 $P(a, a^3)$ をとり、線分 OP と曲線によって囲まれた部分を A とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) A を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

イ

- (2) A を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 W を求めよ。

ロ

- (3) 直線 OP の傾きを m とするとき、 $\frac{mW}{V}$ の値を求めよ。

ハ

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

5

関数 $y = \frac{\log x}{x^2}$ のグラフを C とするとき、次の問いに答えよ。(結論に至る過程も記述すること。)

(1) 関数 $y = \frac{\log x}{x^2}$ の増減、極値、 C の凹凸、変曲点を調べて、増減表をつくり、 C を座標平面上に描け。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^2} = 0$ を用いてもよい。

(2) a を定数とする。方程式 $\log x = ax^2$ の異なる実数解の個数を調べよ。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

6

 n を自然数とし、

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

とすると、以下の問いに答えよ。

- (1) 次の等式を数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- (2) (1)の結果を利用して、 $S_{3n} + n$ が 3 の倍数であることを証明せよ。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)