$\boxed{1}$

イ	$\frac{14}{3}$	ロ	$\frac{1}{3}$	ハ	$\frac{1}{5}$	ニ	$\frac{7\sqrt{5}}{5}$	ホ	$\frac{\pi}{2}$
ヘ	$\frac{2}{3}<x<6$	ト	$\frac{1}{27}$	チ	$\frac{14}{27}$				

〔解説〕

(1)

(ⅰ)

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}$$

となる。

(ⅱ)

$t=\sin x$ とおく。

$$\frac{dt}{dx}=\cos x \iff dt=\cos x dx$$

x	0	→	$\frac{\pi}{2}$
t	0	→	1

より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos x\,dx = \int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

となる。

(2)

$$\left|\vec{a}\right|^2 = 1^2+3^2 = 10$$
$$\left|\vec{b}\right|^2 = 2^2+(-1)^2 = 5$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 2+3\cdot(-1) = -1$$

より

$$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2\left|\vec{b}\right|^2 = 10-2t+5t^2 = 5\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{49}{5}$$

となる。つまり $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2$ は $t=\frac{1}{5}$ で最小値 $\frac{49}{5}$ をとる。すなわち $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ は $t=\frac{1}{5}$ で最小値

$$\sqrt{\frac{49}{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$$

をとる。

(3)

$$\sin 2\theta-2\cos\theta=0 \iff 2\sin\theta\cos\theta-2\cos\theta=0 \iff 2\cos\theta(\sin\theta-1)=0$$

より，$\cos\theta=0$ または $\sin\theta=1$ となる。$0\leqq\theta\leqq\pi$ よりいずれも

$$\theta=\frac{\pi}{2}$$

となる。

(4)

真数条件より

$$2x-3>0 \iff x>\frac{2}{3} \quad \cdots ①$$

である。また底 $3>1$ より

$$\log_3(2x-3)<2 \iff 2x-3<3^2=9 \iff x<6 \quad \cdots ②$$

となる。①，②から求める範囲は

$$\frac{2}{3}<x<6$$

となる。

(5)

3 色から 1 色選ぶ選び方は 3 通りである。各袋からある色の玉を取り出す確率は $\frac{1}{3}$ なので 4 つの袋から取り出す玉がすべて同じ色である確率は

$$3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{27}$$

となる。

次に，3 種類すべての色が出る確率を考える。2 回出る色の選び方は

${}_3C_1=3$ 通り

である。また 2 回出る色の玉が出る袋の選び方は

${}_4C_2=6$ 通り

である。また残り 2 袋の玉の色の選び方は

${}_2C_1=2$ 通り

である。以上から 3 種類すべての色が出る確率は

$$3\cdot 6\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{4}{9}$$

となる。

以上から，2 種類の色が出る確率は

$$1-\frac{1}{27}-\frac{4}{9}=\frac{14}{27}$$

となる。

$\boxed{2}$

イ	$(1-s)\vec{a}+\frac{4}{5}s\vec{b}$	ロ	$\frac{1}{4}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$	ハ	$\frac{1}{16}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$

〔解説〕

(1)

C は OA を $1:3$ に内分する点より

$$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$$

である。また D は OB を $4:1$ に内分する点より

$$\overrightarrow{OD}=\frac{4}{5}\overrightarrow{OB}$$

である。 $AE:ED=s:(1-s)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE}&=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}\\&=(1-s)\overrightarrow{OA}+\frac{4}{5}s\overrightarrow{OB}\\&=(1-s)\vec{a}+\frac{4}{5}s\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。

(2)

$BE:EC=t:(1-t)$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE}&=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OB}\\&=\frac{1}{4}t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}\\&=\frac{1}{4}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\end{aligned}$$

と表せる。

(3)

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立なので, (1)と(2)の結果の各係数を比較することにより

$$\begin{cases}1-s=\frac{1}{4}t\\ \frac{4}{5}s=1-t\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}s=\frac{15}{16}\\ t=\frac{1}{4}\end{cases}$$

となる。よって,

$$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{16}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$$

と表すことができる。

$\boxed{3}$

$\boxed{イ}$ $-\dfrac{1}{2}$ $\boxed{ロ}$ $\dfrac{1}{4}$ $\boxed{ハ}$ $\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}$ $\boxed{ニ}$ $1-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

〔解説〕

(1)

$$a_1=S_1$$
$$S_1=1-2-a_1=-a_1-1$$

の２式より

$$a_1=-\frac{1}{2}$$

となる。

また，これより

$$S_2=2-2-a_2$$
$$\Leftrightarrow a_1+a_2=-a_2$$
$$\Leftrightarrow 2a_2=-a_1$$
$$\Leftrightarrow a_2=\frac{1}{4}$$

と求まる。

(2)

$$S_{n+1}=n+1-2-a_{n+1}$$
$$=n-1-a_{n+1}$$

から

$$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$$
$$=(n-1-a_{n+1})-(n-2-a_n)$$
$$=1-a_{n+1}+a_n$$

$$\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}$$

となる。

(3)

特性方程式$x=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$を解くと$x=1$となるので，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}-1=\frac{1}{2}(a_n-1)$$

と変形できる。ここで数列$\{a_n-1\}$は初項

$$a_1-1=-\frac{3}{2}$$

公比$\dfrac{1}{2}$の等比数列となるので

$$a_n-1=-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n=1-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となる。

$\boxed{4}$

イ $(e, 0)$ ロ $(e^2, 1)$ ハ $\dfrac{e^2}{2}-e$

〔解説〕

(1)

$y=\log x-1$ に $y=0$ を代入することにより

$$0=\log x-1$$
$$\Leftrightarrow \log x=1$$
$$\Leftrightarrow x=e$$

となる。つまり $y=\log x-1$ と x 軸との交点は $(e, 0)$ である。

(2)

接点を $(t, \log t-1)$ とおく。(ただし $t>0$ である)

$$y=\log x-1$$
$$\Rightarrow y'=\frac{1}{x}$$

より l の方程式は

$$y-(\log t-1)=\frac{1}{t}(x-t)$$

となる。これが原点を通るので

$$0-(\log t-1)=\frac{1}{t}(0-t)$$
$$\Leftrightarrow \log t=2$$
$$\Leftrightarrow t=e^2$$

となる。また

$$\log t-1$$
$$=\log e^2-1$$
$$=1$$

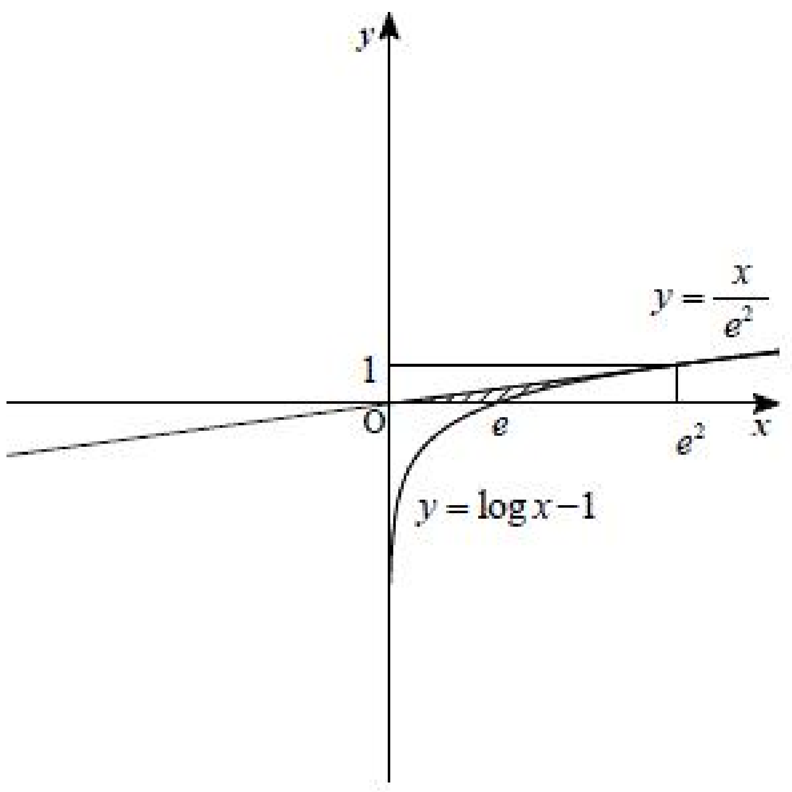
から接点の座標は $(e^2, 1)$ である。

(3)

(2)の結果から接線の方程式は

$$y-1=\frac{1}{e^2}(x-e^2)$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{x}{e^2}$$

である。したがって求める面積は下図の斜線部であるとわかる。



ここで

$$y=\log x-1$$
$$\Leftrightarrow \log x=y+1$$
$$\Leftrightarrow x=e^{y+1}$$
$$y=\frac{x}{e^2}$$
$$\Leftrightarrow x=e^2y$$

より求める面積は

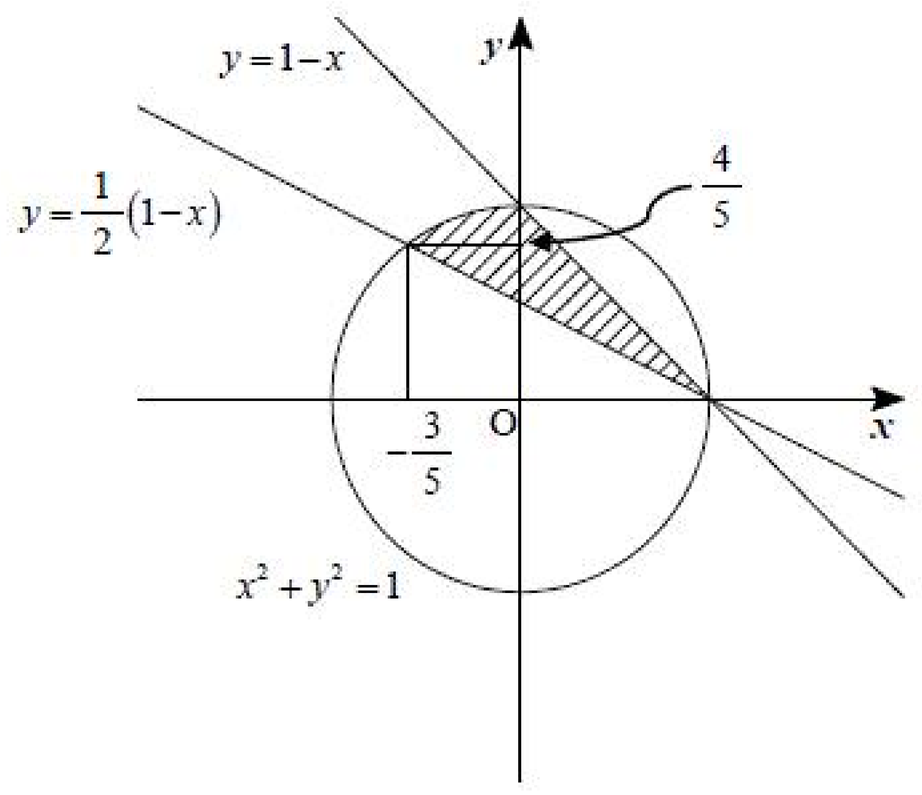
$$\int_0^1\left(e^{y+1}-e^2y\right)dy=\left[e^{y+1}-\frac{e^2}{2}y^2\right]_0^1$$
$$=\left(e^2-\frac{e^2}{2}\right)-e$$
$$=\frac{e^2}{2}-e$$

となる。

5

$x^2+y^2-1 \leqq 0$
$\Leftrightarrow x^2+y^2 \leqq 1$
$x+y-1 \leqq 0$
$\Leftrightarrow y \leqq 1-x$
$x+2y-1 \geqq 0$
$\Leftrightarrow y \geqq \frac{1}{2}(1-x)$

から領域 D を図示すると以下の図の斜線部となる。(ただし境界線上はすべて含む)



$x^2+y^2=1$ と $y=\frac{1}{2}(1-x)$ の交点の座標を求めると,

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=\frac{1}{2}(1-x) \end{cases}$$

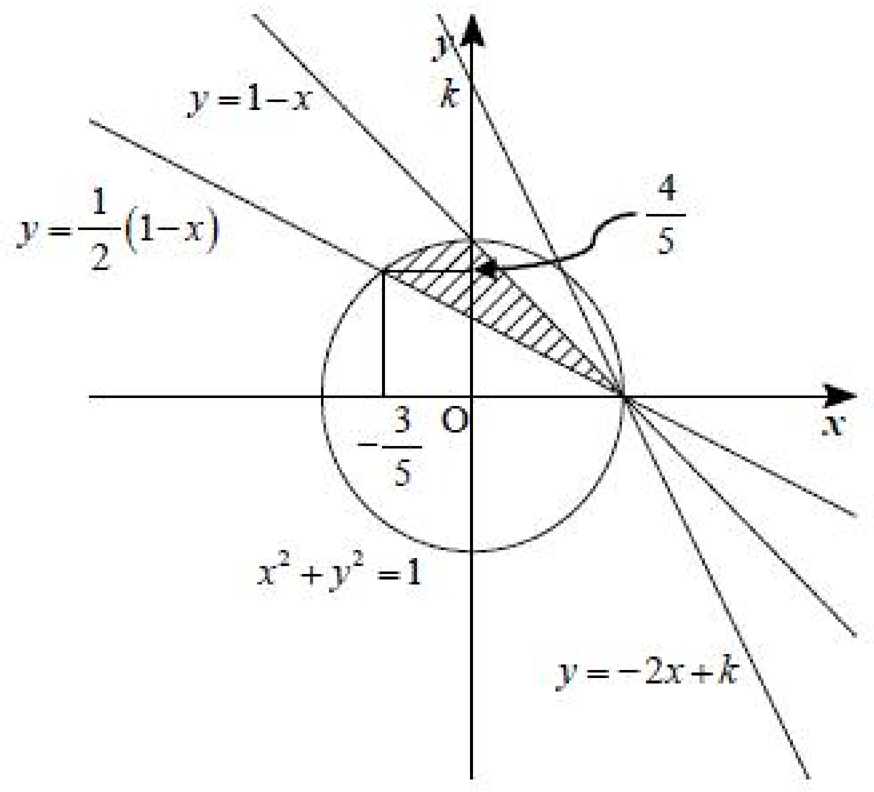
$\Rightarrow x^2+\frac{1}{4}(1-x)^2=1$
$\Leftrightarrow 5x^2-2x-3=0$
$\Leftrightarrow (5x+3)(x-1)=0$
$\therefore x=-\frac{3}{5}$

$y=\frac{1}{2}(1-x)$
$\quad =\frac{4}{5}$

より,$\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ である。ここで,$2x+y=k$ とおくと

$2x+y=k$
$\Leftrightarrow y=-2x+k$

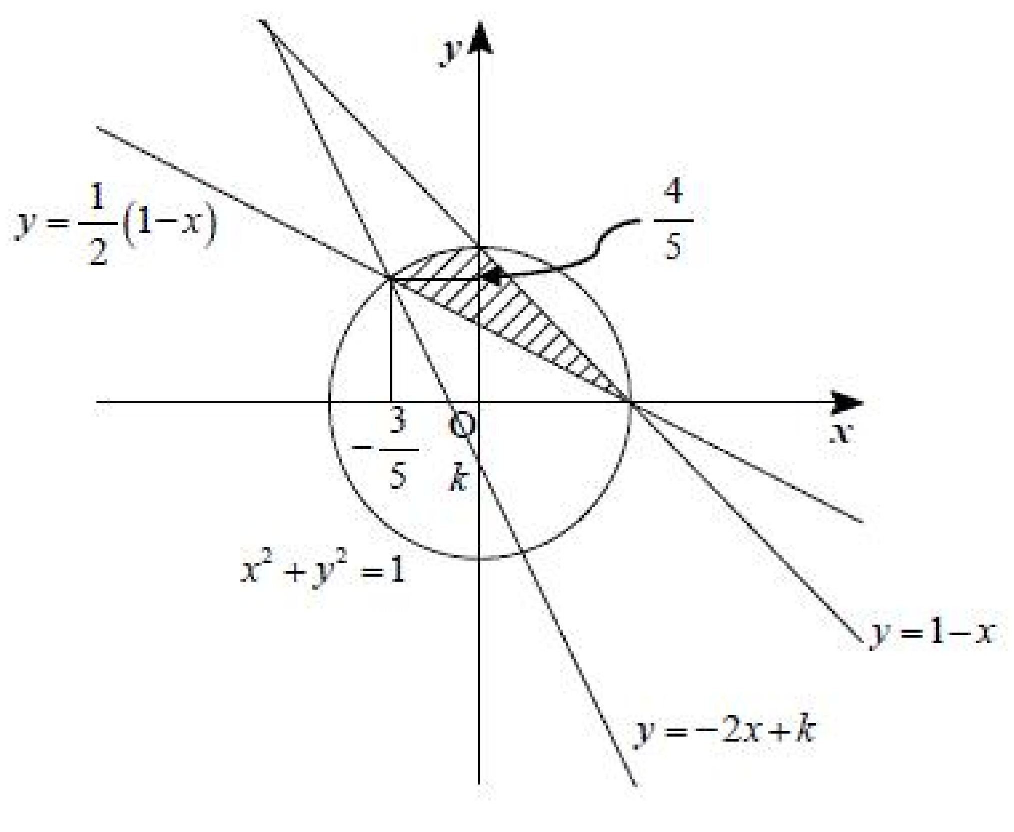
となる。つまり k は $y=-2x+k$ の y 切片であることが分かる。この切片の最大値と最小値を求めればよい。まず最大値について考える。



図から,$y=-2x+k$ が $(1, 0)$ を通る時に y 切片が最大となることがわかる。このとき

$k=2\cdot 1+0$
$\quad =2$

となる。つまり $2x+y$ の最大値は 2 である。
次に,最小値について考える。



同様に図から,$y=-2x+k$ が $x^2+y^2=1$ と $y=\frac{1}{2}(1-x)$ の交点(ただし $x<0$ の点)を通る時に y 切片が最小となることがわかる。つまり,$y=-2x+k$ が $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ を通る時に y 切片は最小となる。これを代入すると,

$k=2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{4}{5}$
$\quad =-\frac{2}{5}$

となる。つまり $2x+y$ の最小値は $-\frac{2}{5}$ である。

(答) 最大値 2, 最小値 $-\frac{2}{5}$

$\boxed{6}$

$A=\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix}$から

$$A^2=\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a^2 & a(a-b)+b(a-b) \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a^2 & a^2-b^2 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A$$
$$=\begin{pmatrix} a^2 & a^2-b^2 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a^3 & a^2(a-b)+b(a^2-b^2) \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a^3 & a^3-b^3 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$$

となる。以上から$A^n=\begin{pmatrix} a^n & a^n-b^n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$と推測できる。これを数学的帰納法で示す。

[1]　$n=1$のとき

$A^n=\begin{pmatrix} a^n & a^n-b^n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$に$n=1$を代入することにより

$$A=\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

となる。問題文より$A=\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix}$なので$n=1$の時は成り立つ。

[2]　$n=k$のとき成り立つと仮定すると

$A^k=\begin{pmatrix} a^k & a^k-b^k \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$となる。ここで

$$A^{k+1}=A^kA$$
$$=\begin{pmatrix} a^k & a^k-b^k \\ 0 & b^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a^{k+1} & a^k(a-b)+b(a^k-b^k) \\ 0 & b^{k+1} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a^{k+1} & a^{k+1}-b^{k+1} \\ 0 & b^{k+1} \end{pmatrix}$$

となり$n=k+1$でも成り立つことが示せた。

以上[1], [2]から,

$$A^n=\begin{pmatrix} a^n & a^n-b^n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}\quad (n\text{は自然数})$$

が示せた。

(証明終)

(答)　$A^n=\begin{pmatrix} a^n & a^n-b^n \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$