$\boxed{1}$

〔解答〕

(1) （i） イ　$-\dfrac{8}{5}$

（ii） ロ　$\dfrac{e^{\pi}+1}{2}$

(2) ハ　$\dfrac{32}{27}$

(3) ニ　$-\sqrt{6}$

(4) ホ　6

(5) ヘ　$\dfrac{\pi}{3}$

(6) ト　20134　チ　25

〔解説〕

(1)(i)

$$t=\sqrt{x+3}$$

とおくと，

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$
$$\therefore dx=2tdt$$

x	-2	$\to$	1
t	1	$\to$	2

であるから，

$$\int_{-2}^{1}x\sqrt{x+3}\,dx=\int_{1}^{2}\left(t^2-3\right)t\cdot 2tdt$$
$$=\left[\frac{2}{5}t^5-2t^3\right]_1^2$$
$$=-\frac{8}{5}$$

となる。

(ii)

部分積分を用いると，

$$\int_0^{\pi}e^x\sin xdx=\left[e^x\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\cos xdx$$
$$=-\left[e^x\cos x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^x(-\sin x)dx$$
$$=-\left(-e^{\pi}-1\right)-\int_0^{\pi}e^x(-\sin x)dx$$

となる。よって，

$$2\int_0^{\pi}e^x\sin xdx=e^{\pi}+1$$
$$\therefore\int_0^{\pi}e^x\sin xdx=\frac{e^{\pi}+1}{2}$$

を得る。

(2)

$$4x^2=(x-1)^2$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+2x-1=0$$
$$\Leftrightarrow (3x-1)(x+1)=0$$
$$\therefore x=-1,\ \frac{1}{3}$$

より，2 つの放物線の交点の x 座標は $-1,\ \dfrac{1}{3}$ であり，$-1<x<\dfrac{1}{3}$ において $4x^2<(x-1)^2$ であるから，求める面積は，

$$\int_{-1}^{\frac{1}{3}}\left\{(x-1)^2-4x^2\right\}dx=\left[-x^3-x^2+x\right]_{-1}^{\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{32}{27}$$

となる。

(3)

$$\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{3}i$$
$$=-\sqrt{6}$$

となる。

(4)

真数条件より，

$$\begin{cases}x-5>0\\ x+3>0\end{cases}$$
$$\therefore 5<x \qquad \cdot\cdot\cdot ①$$

であるから，求める解は，

$$\log_3(x-5)=2-\log_3(x+3)$$
$$\Leftrightarrow \log_3(x-5)(x+3)=2$$
$$\Leftrightarrow (x-5)(x+3)=9$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x-24=0$$
$$\Leftrightarrow (x-6)(x+4)=0$$
$$\therefore x=6\ (\because ①)$$

となる。

(5)

倍角公式より，

$$\sin 2x-\frac{1}{2}=\sin x-\cos x$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\sin x+\cos x-\frac{1}{2}=0$$
$$\Leftrightarrow (2\sin x+1)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}\ (\because 0\leqq x\leqq \pi \text{ において } 2\sin x+1>0)$$
$$\therefore x=\frac{\pi}{3}\ (\because 0\leqq x\leqq \pi)$$

となる。

(6)

初めて 20000 以上になる数は，一万の位が 2 で，以下千の位から順に残りの数を小さい順に並べた時の数，すなわち 20134 である。これより小さい数は，一万の位が 1 である数であるから，

$$4!=24 \text{ 個}$$

存在する。よって 20134 は 25 番目の数である。

$\boxed{2}$

〔解答〕

(1) イ $\dfrac{11}{2}$

(2) ロ $\dfrac{1}{2}$ ハ $\dfrac{1}{2}$

(3) ニ $-\dfrac{32}{43}$ ホ $\dfrac{11}{43}$

〔解説〕

(1)

余弦定理より，

$$\cos\angle \mathrm{AOB} = \frac{2^2+4^2-3^2}{2\cdot 2\cdot 4} = \frac{11}{16}$$

であるから，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 4\cdot\frac{11}{16} = \frac{11}{2}$$

となる。

(2)

M は辺 AB の中点であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

となる。

(3)

P は線分 OM 上の点であるから，実数 $k\,(0<k<1)$ を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{k}{2}\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}$$

とかける。よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(\frac{k}{2}-1\right)\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b} \qquad \cdots ①$$

となる。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\left(\frac{k}{2}-1\right)\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{b}\right\}\cdot\vec{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{k}{2}-1\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{k}{2}\left|\vec{b}\right|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{k}{2}-1\right)\cdot\frac{11}{2}+\frac{k}{2}\cdot 16 = 0$$

$$\therefore k = \frac{22}{43}$$

であるから，①より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -\frac{32}{43}\vec{a}+\frac{11}{43}\vec{b}$$

となる。

3

〔解答〕

(1) イ　-1　ロ　1

(2) ハ　2^n

(3) ニ　$2^{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & n \\ -n & 2+n \end{pmatrix}$

〔解説〕

(1)

$$
\begin{aligned}
P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P &= P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{b}\begin{pmatrix} b & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2+a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2+a & b \\ -\dfrac{a^2}{b} & -a+2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

より，求める条件は，

$$
\begin{cases} 2+a=1 \\ b=1 \\ -\dfrac{a^2}{b}=-1 \\ -a+2=3 \end{cases}
$$

$$
\therefore \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}
$$

となる。

(2)

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x_n & \dfrac{n}{2}x_n \\ 0 & x_n \end{pmatrix}
$$

より，

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \dfrac{1}{2}x_1 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}
$$

$$\therefore x_1 = 2 \qquad ・・・①$$

であり，また，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n & \dfrac{n}{2}x_n \\ 0 & x_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x_n & (n+1)x_n \\ 0 & 2x_n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\therefore x_{n+1} = 2x_n \qquad ・・・②$$

となるから，①，②より，

$$x_n = 2^n$$

である。

(3)

(1)と(2)の結果より，

$$
\begin{aligned}
A^n &= \left\{P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P\right\}^n \\
&= P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n P \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & n\cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n - n\cdot 2^{n-1} & n\cdot 2^{n-1} \\ -2^n & 2^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n - n\cdot 2^{n-1} & n\cdot 2^{n-1} \\ -n\cdot 2^{n-1} & 2^n + n\cdot 2^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= 2^{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & n \\ -n & 2+n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。

4

〔解答〕

(1) イ $\frac{1}{2}$

(2) ロ $\frac{7}{8}$

(3) ハ $\frac{49}{64}$

(4) ニ $\frac{17}{32}$

〔解説〕

(1)

$a+b+c$ が奇数になるのは，a, b, c のうち奇数が 1 つまたは 3 つのときである。よって求める確率は，

$$ {}_3C_1 \cdot \frac{2}{4} \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^3 = \frac{1}{2} $$

である。

(2)

$a \times b \times c$ が奇数になるのは，a, b, c が全て奇数であるときだから，その確率は，

$$ \left(\frac{2}{4}\right)^3 = \frac{1}{8} \qquad \cdot\cdot\cdot ① $$

となる。よって $a \times b \times c$ が偶数となる確率は，

$$ 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} $$

である

(3)

$a \times b \times c$ が 3 の倍数にならないのは，a, b, c が全て 1 か 2 であるときだから，その確率は

$$ \left(\frac{2}{4}\right)^3 = \frac{1}{8} $$

であり，また $a \times b \times c$ が 2 の倍数にも 3 の倍数にもならない確率は，a, b, c が全て 1 であるときだから，その確率は

$$ \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} $$

となる。よって $a \times b \times c$ が 6 の倍数，すなわち 2 の倍数かつ 3 の倍数になる確率は，①とあわせて，

$$ 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{64}\right) = \frac{49}{64} $$

となる。

(4)

[1] a, b, c が全て 3 の倍数のとき

このとき，$a \times b, b \times c, c \times a$ はいずれも 3 の倍数になるので，$a \times b + b \times c + c \times a$ も 3 の倍数になる。また，a, b, c が全て 3 の倍数になる確率は，

$$ \left(\frac{2}{4}\right)^3 = \frac{1}{8} $$

である。

[2] a, b, c のうち 2 つが 3 の倍数のとき

a, b が 3 の倍数であるとすると，$a \times b, b \times c, c \times a$ はいずれも 3 の倍数になるので，$a \times b + b \times c + c \times a$ も 3 の倍数になる。よって対称性より，a, b, c のうち 2 つが 3 の倍数のとき，$a \times b + b \times c + c \times a$ は 3 の倍数になり，その確率は，

$$ {}_3C_2 \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^2 \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{8} $$

である。

[3] a, b, c のうち 1 つが 3 の倍数のとき

a が 3 の倍数であるとすると，$a \times b, c \times a$ はいずれも 3 の倍数になるが，$b \times c$ は 3 の倍数にならず，$a \times b + b \times c + c \times a$ は 3 の倍数にならない。よって対称性より，a, b, c のうち 1 つが 3 の倍数のとき，$a \times b + b \times c + c \times a$ は 3 の倍数にならない。

[4] a, b, c がいずれも 3 の倍数でないとき

a, b, c はいずれも 1 か 2 である。

[i] a, b, c がすべて 1 のとき

このとき，$a \times b + b \times c + c \times a$ は 3，すなわち 3 の倍数になる。

[ii] a, b, c のうち 2 つが 1 のとき

このとき，$a \times b + b \times c + c \times a$ は 5，すなわち 3 の倍数にならない。

[iii] a, b, c のうち 1 つが 1 のとき

このとき，$a \times b + b \times c + c \times a$ は 8，すなわち 3 の倍数にならない。

[iv] a, b, c がすべて 2 のとき

このとき，$a \times b + b \times c + c \times a$ は 12，すなわち 3 の倍数になる。

以上，[i], [ii], [iii], [iv]より，a, b, c がいずれも 3 の倍数でないとき，a, b, c が全て一致するときのみ $a \times b + b \times c + c \times a$ は 3 の倍数になり，その確率は，

$$ 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{32} $$

である。

以上，[1], [2], [3], [4]より，求める確率は，

$$ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{32} = \frac{17}{32} $$

となる。

$\boxed{5}$

$$y' = 2e^{2x} - 2e^{x}$$
$$= 2e^{x}\left(e^{x} - 1\right)$$
$$\therefore y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
$$y'' = 4e^{2x} - 2e^{x}$$
$$= 2e^{x}\left(2e^{x} - 1\right)$$
$$\therefore y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\log 2$$

であり，

$$e^{2\cdot 0} - 2e^{0} = -1$$

$$e^{2(-\log 2)} - 2e^{-\log 2} = -\frac{3}{4}$$

より，増減表は次表のようになる。

x	$\cdots$	$-\log 2$	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↘	変曲点 $-\frac{3}{4}$	↘	極小 -1	↗

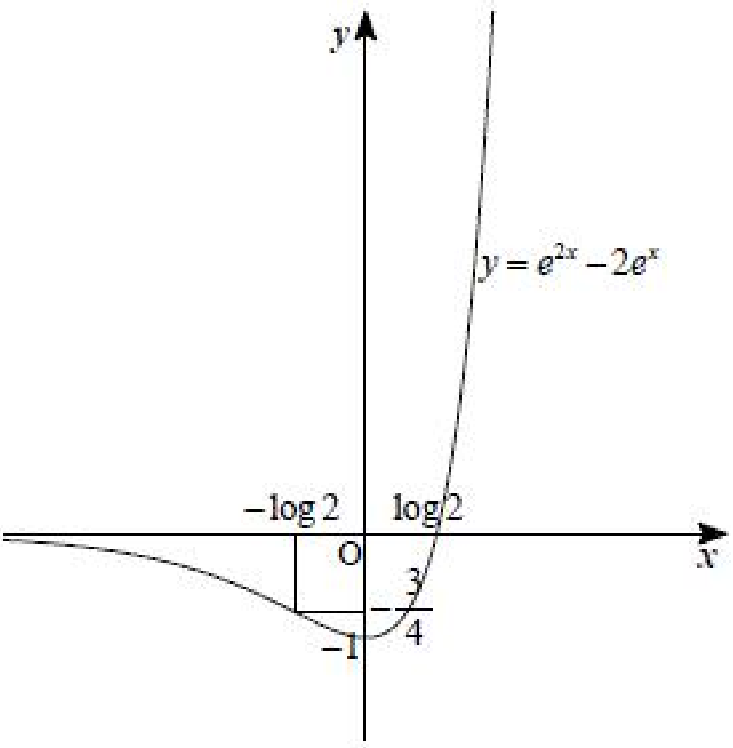
ここで，

$$\lim_{x \to -\infty}\left(e^{2x} - 2e^{x}\right) = 0$$

より，直線 $y = 0$ すなわち x 軸は $y = e^{2x} - 2e^{x}$ のグラフの漸近線になる。また，

$$e^{2x} - 2e^{x} = 0$$
$$\Leftrightarrow e^{x}\left(e^{x} - 2\right) = 0$$
$$\therefore x = \log 2$$

より，x 軸と $y = e^{2x} - 2e^{x}$ の交点の x 座標は $\log 2$ である。以上より，$y = e^{2x} - 2e^{x}$ のグラフは次図のようになる。



(答) 増減表　前表

グラフ　前図

6

数学的帰納法を用いて，任意の自然数nに対し，

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad \cdots ①$$

が成立することを示す。

[1] $n=1$のとき

$$1^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

より，このとき①は成立する。

[2] $n=k$で①が成立するとき

$$\begin{aligned}1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3&=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3\\&=\frac{\{k^2+4(k+1)\}(k+1)^2}{4}\\&=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}\\&=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\end{aligned}$$

より，$n=k+1$のときも①は成立する。

以上，[1], [2]より，任意の自然数nに対して①は成立する。

(証明終)