

平成 25 年度 入学試験問題

数 学

【注意事項】

- 1 係員の指示があるまで、問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は 12 ページ、解答用紙は 4 枚あります。
- 3 落丁、乱丁、印刷の不鮮明な箇所などがあったときは、手を挙げて係員に申し出ることに。
- 4 各解答用紙(4 枚)の受験番号欄に受験番号を数字で記入すること。
- 5 解答は必ず各問題別の解答用紙の所定の欄に記入すること。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してかまいませんが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了時刻まで退室してはいけません。
- 8 解答用紙は持ち帰ってはいけません。その他は持ち帰ること。

1 (1)の問いに答えよ。また、(2)から(6)までの空欄をうめよ。

(1) 次の積分を求めよ。

(i) $\int_{-2}^1 x\sqrt{x+3} dx =$

(ii) $\int_0^\pi e^x \sin x dx =$

(2) 2つの放物線 $y = 4x^2$ と $y = (x-1)^2$ で囲まれた部分の面積は である。

(3) $\sqrt{-2}\sqrt{-3} =$ である。

(4) 方程式 $\log_3(x-5) = 2 - \log_3(x+3)$ の解は $x =$ である。

(5) $0 \leq x \leq \pi$ において $\sin 2x - \frac{1}{2} = \sin x - \cos x$ のとき、 $x =$ である。

(6) 5個の数字0, 1, 2, 3, 4を重複なく用いて作られる5桁の整数を小さい順に並べる。初めて20000以上になる整数は で、それは 番目である。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

2 $\triangle OAB$ において、辺 OA 、 OB 、 AB の長さをそれぞれ2、4、3とする。辺 AB の midpoint を M とし、頂点 A から辺 OB に下ろした垂線と線分 OM との交点を P とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ として、以下の空欄をうめよ。

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ である。

(2) \overrightarrow{OM} を \vec{a} と \vec{b} を用いて表すと

$$\overrightarrow{OM} = \text{} \vec{a} + \text{} \vec{b}$$

である。

(3) \overrightarrow{AP} を \vec{a} と \vec{b} を用いて表すと

$$\overrightarrow{AP} = \text{} \vec{a} + \text{} \vec{b}$$

である。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

3 n を自然数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ について、次の手順で A^n を求める。このとき、以下の空欄をうめよ。

(1) 行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ が $P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P = A$ を満たすとき、 $a = \boxed{\text{イ}}$ 、
 $b = \boxed{\text{ロ}}$ である。

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x_n & \frac{n}{2}x_n \\ 0 & x_n \end{pmatrix}$ と表せる。このとき、 $x_n = \boxed{\text{ハ}}$ である。

(3) $A^n = \boxed{\text{ニ}}$ である。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

4 袋の中に、1と書かれた玉、2と書かれた玉、3と書かれた玉、6と書かれた玉が1つずつ、全部で4つ入っている。ここから玉を1つ取り出して袋に戻すことを3回行う。取り出した玉に書かれた数を順に a, b, c とする。以下の問いに答えよ。

(1) $a + b + c$ が奇数になる確率を求めよ。

(2) $a \times b \times c$ が偶数になる確率を求めよ。

(3) $a \times b \times c$ が6の倍数になる確率を求めよ。

(4) $a \times b + b \times c + c \times a$ が3の倍数になる確率を求めよ。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

- 5 関数 $y = e^{2x} - 2e^x$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べて，増減表をつくり，そのグラフを座標平面上に描け。ただし，漸近線および座標軸との交点も調べること。

(結論に至る過程も記述すること。)

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

- 6 n を自然数とすると、次の等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)