

【解答】

(1)	イ	$\frac{3}{2}\log 3-1$	ロ	$\frac{2}{3}$	ハ	2
(2)	ニ	$\frac{3}{4}$				
(3)	ホ	12				
(4)	ヘ	$\frac{11}{6}\pi$	ト	2		
(5)	チ	十分条件である	リ	必要十分条件である		

【解説】

(1)(i)

$t=2x+1$ と置換すると、 $\frac{dt}{dx}=2$ であり、積分範囲は以下の表のように変化する。

x	0	→	1
t	1	→	3

したがって、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log(2x+1) dx &= \frac{1}{2} \int_1^3 \log t \cdot 2 dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 \log t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 (t)' \log t dt \\ &= \frac{1}{2} \left([t \log t]_1^3 - \int_1^3 t \cdot \frac{1}{t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} (3 \log 3 - [t]_1^3) \\ &= \frac{3}{2} \log 3 - 1\end{aligned}$$

となる

(ii)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cos x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) (\sin x)' dx \\ &= \left[\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

となる。

(iii)

$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin 2x \geq 0$ であり、 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ のとき $\sin 2x \leq 0$ である。したがって、

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} |\sin 2x| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\sin 2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{2} \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= 2\end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)\end{aligned}$$

と変形できる。したがって、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

となる。

(3)

真数条件より、

$$x-10>0 \text{ かつ } \frac{3}{x}>0 \Leftrightarrow x>10$$

である。この範囲において、方程式を変形すると、

$$\begin{aligned}\log_2(x-10) &= 3 + \log_2 \frac{3}{x} \\ \Leftrightarrow \log_2(x-10) &= \log_2 8 + \log_2 \frac{3}{x} \\ \Leftrightarrow \log_2(x-10) &= \log_2 \frac{24}{x} \\ \Leftrightarrow x-10 &= \frac{24}{x} \\ \Leftrightarrow x(x-10) &= 24 (\because x \neq 0) \\ \Leftrightarrow x^2-10x-24 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+2)(x-12) &= 0 \\ \therefore x &= 12, -2\end{aligned}$$

となり、 $x>10$ であるから、解は $x=12$ である。

(4)

$$\begin{aligned}-\sin x + \sqrt{3} \cos x &= 2 \left(-\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) \\ &= 2 \left(\sin x \cos \frac{2}{3} \pi + \cos x \sin \frac{2}{3} \pi \right) \\ &= 2 \sin \left(x + \frac{2}{3} \pi \right)\end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $0 \leq x < 2\pi$ より

$$\frac{2}{3} \pi \leq x + \frac{2}{3} \pi < 2\pi + \frac{2}{3} \pi$$

であるから、 $2 \sin \left(x + \frac{2}{3} \pi \right)$ は

$$x + \frac{2}{3} \pi = 2\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{11}{6} \pi$$

のときに最大値2をとる。

(5)(i)

n が6の倍数のとき、整数 m を用いて $n=6m$ と表せる。このとき、

$$n=6m=3 \cdot (2m)$$

であり、 $2m$ が整数であることから、 n は3の倍数である。

一方、 $n=3$ のとき、 n は3の倍数であるが、6の倍数でない。したがって、 n が3の倍数であっても、 n が6の倍数であるとは限らない。

以上より、 n が6の倍数であることは、 n が3の倍数であるための十分条件であるが、必要条件でない。

(ii)

n が奇数のとき、整数 m を用いて $n=2m+1$ と表せる。このとき、

$$\begin{aligned}n^2 &= (2m+1)^2 \\ &= 4m^2 + 4m + 1 \\ &= 2(2m^2 + 2m) + 1\end{aligned}$$

であり、 $2m^2+2m$ が整数であることから、 n^2 は奇数である。

一方、命題「 n が奇数のとき、 n は奇数」の対偶は「 n が偶数のとき、 n^2 は偶数」である。 n が偶数のとき、整数 m を用いて $n=2m$ と表せる。このとき、

$$\begin{aligned}n^2 &= (2m)^2 \\ &= 4m^2 \\ &= 2 \cdot 2m^2\end{aligned}$$

であり、 $2m^2$ が整数であることから、 n^2 は偶数である。よって、対偶の命題「 n が偶数のとき、 n^2 は偶数」が成り立つため、命題「 n^2 が奇数のとき、 n は奇数」も成り立つ。

以上より、 n が奇数であることは、 n^2 が奇数であるための必要十分条件である。

〔解答〕

(1)	イ	2	□	$2b_n + 1$
(2)	ハ	$3 \cdot 2^{n-1} - 1$		
(3)	ニ	$3 \cdot 2^{n-1} - n - 1$		

〔解説〕

(1)

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 3$$

であるため、

$$b_1 = a_2 - a_1 = 2$$

である。また、

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + n \\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + n + 1 \end{cases}$$

であるから、各辺ごとに差をとると、

$$\begin{aligned} (a_{n+2} - a_{n+1}) &= 2(a_{n+1} - a_n) + 1 \\ \therefore b_{n+1} &= 2b_n + 1 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(2)

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 2b_n + 1 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} + 1 &= 2(b_n + 1) \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} b_n + 1 &= 2^{n-1}(b_1 + 1) \\ \Leftrightarrow b_n + 1 &= 3 \cdot 2^{n-1} \\ \Leftrightarrow b_n &= 3 \cdot 2^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

となる。

(3)

数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3 \cdot 2^{k-1} - 1) \\ &= 1 + 3 \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} - (n-1) \\ &= 1 + 3 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} - (n-1) \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} - n - 1 \end{aligned}$$

となり、この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

〔解答〕

(1)	イ	$-6t^2 + 8t - 1$		
(2)	ロ	$\frac{2}{3}$	ハ	$\frac{5}{3}$
(3)	ニ	$\frac{4 - \sqrt{10}}{6}$		

〔解説〕

(1)

 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ をそれぞれ求めると,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OP} &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \\
 &= (1-t)(1, 1, 1) + t(-1, 2, 0) \\
 &= (-2t+1, t+1, -t+1) \\
 \overrightarrow{OQ} &= (1-t)\overrightarrow{OC} + t\overrightarrow{OA} \\
 &= (1-t)(-1, 1, -1) + t(1, 1, 1) \\
 &= (2t-1, 1, 2t-1)
 \end{aligned}$$

となるため,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= (-2t+1)(2t-1) + (t+1) \cdot 1 + (-t+1)(2t-1) \\
 &= -4t^2 + 4t - 1 + t + 1 - 2t^2 + 3t - 1 \\
 &= -6t^2 + 8t - 1
 \end{aligned}$$

である。

(2)

$$-6t^2 + 8t - 1 = -6\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}$$

と変形できる。よって、 $0 \leq t \leq 1$ の範囲において、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ は $t = \frac{2}{3}$ のときに最大値 $\frac{5}{3}$ をとる。

(3)

$$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$$

より,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= 0 \\
 \Leftrightarrow -6t^2 + 8t - 1 &= 0 \\
 \Leftrightarrow t &= \frac{4 \pm \sqrt{10}}{6}
 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $3 < \sqrt{10} < 4$ より $\frac{4 + \sqrt{10}}{6} > 1$ であるから、 $t = \frac{4 + \sqrt{10}}{6}$ は条件 $0 \leq t \leq 1$ に反する。以上より、求める解は $t = \frac{4 - \sqrt{10}}{6}$ である。

〔解答〕

(1)	イ	$\frac{4}{7}$
(2)	ロ	$p_n = \frac{8n}{(n+4)(n+3)}$
(3)	ハ	$n \geq 4$
(4)	ニ	$n = 3, 4$

〔解説〕

(1)

玉の数は合計で $4+3=7$ より 7 個であるから、2 個の玉を同時に取り出す方法の総数は

$${}_7C_2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21 \text{ 通り}$$

であり、白玉と赤玉を 1 個ずつ取り出す方法の総数は

$$4 \cdot 3 = 12 \text{ 通り}$$

である。したがって、求める確率は

$$\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

である。

(2)

玉の数は合計で $n+4$ 個であるから、2 個の玉を同時に取り出す方法の総数は

$${}_{n+4}C_2 = \frac{(n+4)(n+3)}{2} \text{ 通り}$$

であり、白玉と赤玉を 1 個ずつ取り出す方法の総数は

$$4 \cdot n = 4n \text{ 通り}$$

である。したがって、求める確率 p_n は

$$p_n = \frac{4n}{\frac{(n+4)(n+3)}{2}} = \frac{8n}{(n+4)(n+3)}$$

である。

(3)

n が自然数のとき、 p_n は正の値であるから、

$$\begin{aligned} p_n &> p_{n+1} \\ \Leftrightarrow \frac{8n}{(n+4)(n+3)} &> \frac{8(n+1)}{(n+5)(n+4)} \\ \Leftrightarrow \frac{n}{n+3} &> \frac{n+1}{n+5} \\ \Leftrightarrow n(n+5) &> (n+1)(n+3) \\ \Leftrightarrow n^2 + 5n &> n^2 + 4n + 3 \\ \Leftrightarrow n &> 3 \end{aligned}$$

となる。ここで、 n は自然数であるから、求める条件は $n \geq 4$ である。

(4)

(3)と同様にして、

$$p_n = p_{n+1} \Leftrightarrow n = 3$$

$$p_n < p_{n+1} \Leftrightarrow n < 3$$

が示せる。したがって、

$$p_1 < p_2 < p_3 = p_4 > p_5 > p_6 > \cdots$$

となるから、 p_n が最大となる n は $n=3, 4$ である。

(1)

 $y = f(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} \\ &= (1-x)e^{-x} \end{aligned}$$

および

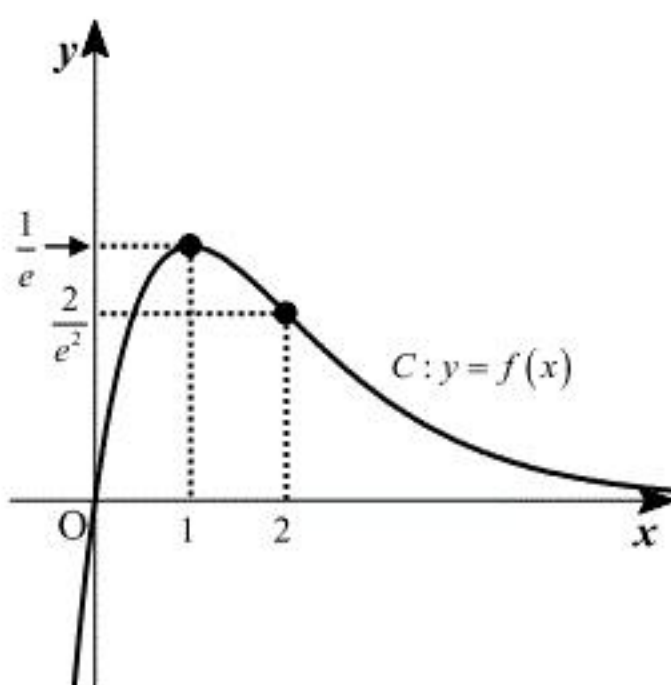
$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{-x} - (1-x)e^{-x} \\ &= (x-2)e^{-x} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$\frac{2}{e^2}$	$\searrow$

また,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

である。以上より、 C を図示すると以下のようになる。

(答)前図

(2)

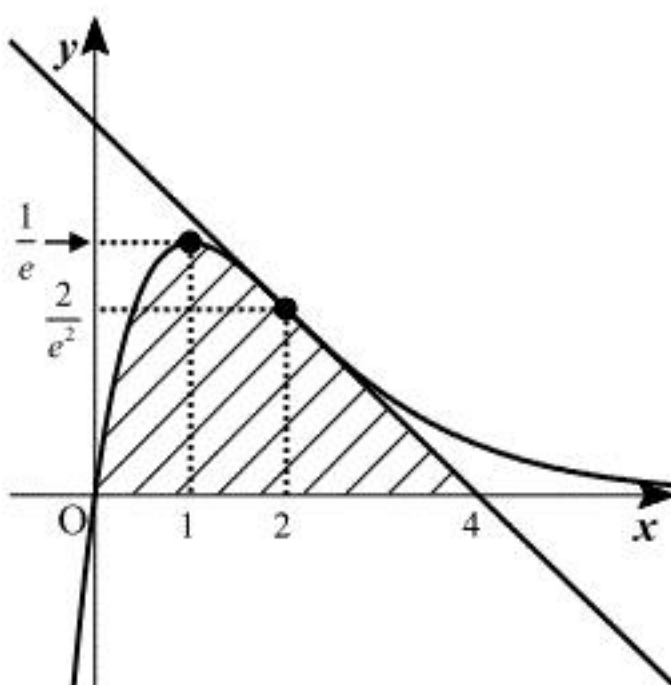
 $f'(2) = -\frac{1}{e^2}$ より、接線 l の方程式は,

$$\begin{aligned} y - \frac{2}{e^2} &= -\frac{1}{e^2}(x-2) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{e^2}(x-4) \end{aligned}$$

となるため、 $y=0$ のとき $x=4$ である。よって、 l と x 軸の交点は $(4, 0)$ である。(答) $(4, 0)$

(3)

求める面積は、以下の図の斜線部である。



よって、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^2 xe^{-x} dx + \frac{1}{2} \cdot (4-2) \cdot \frac{2}{e^2} &= [-xe^{-x}]_0^2 - \int_0^2 (-e^{-x}) dx + \frac{2}{e^2} \\ &= -\frac{2}{e^2} - [e^{-x}]_0^2 + \frac{2}{e^2} \\ &= 1 - \frac{1}{e^2} \end{aligned}$$

である。

(答) $1 - \frac{1}{e^2}$

(1)

$$\begin{aligned}
{}_{n+2}C_3 + {}_{n+2}C_2 &= \frac{(n+2)!}{(n-1)!3!} + \frac{(n+2)!}{n!2!} \\
&= \frac{n \cdot (n+2)!}{n!3!} + \frac{3 \cdot (n+2)!}{n!3!} \\
&= \frac{(n+3) \cdot (n+2)!}{n!3!} \\
&= \frac{(n+3)!}{n!3!} \\
&= {}_{n+3}C_3
\end{aligned}$$

より ${}_{n+2}C_3 + {}_{n+2}C_2 = {}_{n+3}C_3$ が示された。

(証明終)

(2)

$$\sum_{i=1}^n {}_{i+1}C_2 = {}_{n+2}C_3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき

$$(\text{左辺}) = \sum_{i=1}^1 {}_{i+1}C_2 = {}_2C_2 = 1$$

および,

$$(\text{右辺}) = {}_{1+2}C_3 = 1$$

であるから, $n=1$ のとき, ①は成り立つ。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき

①が成り立つと仮定する。すなわち, $\sum_{i=1}^k {}_{i+1}C_2 = {}_{k+2}C_3$ である。このとき,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} {}_{i+1}C_2 &= {}_{k+2}C_2 + \sum_{i=1}^k {}_{i+1}C_2 \\
&= {}_{k+2}C_2 + {}_{k+2}C_3 \\
&= {}_{k+3}C_3 \\
&= {}_{(k+1)+2}C_3
\end{aligned}$$

となるから, ①が $n=k$ で成り立つとき, ①は $n=k+1$ でも成り立つ。

以上[1], [2]から, 数学的帰納法により, 自然数 n について①が成り立つことが示された。

(証明終)