

平成 27 年度 入学試験問題

数 学

【注意事項】

- 1 係員の指示があるまで、問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は 12 ページ、解答用紙は 4 枚あります。
- 3 落丁、乱丁、印刷の不鮮明な箇所などがあったときは、手を挙げて係員に申し出ること。
- 4 各解答用紙(4 枚)の受験番号欄に受験番号を数字で記入すること。
- 5 解答は必ず各問題別の解答用紙の所定の欄に記入すること。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してかまいませんが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了時刻まで退室してはいけません。
- 8 解答用紙は持ち帰ってはいけません。その他は持ち帰ること。

1 (1), (2), (5)の問いに答えよ。また, (3), (4)の空欄をうめよ。

(1) 次の積分を求めよ。

(i) $\int_0^1 \log(2x+1) dx =$ イ

(ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx =$ ロ

(iii) $\int_0^x |\sin 2x| dx =$ ハ

(2) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} \right) =$$
 ニ

(3) 方程式 $\log_2(x-10) = 3 + \log_2 \frac{3}{x}$ の解は $x =$ ホ である。

(4) $0 \leq x < 2\pi$ において $-\sin x + \sqrt{3} \cos x$ は $x =$ ヘ のとき、
最大値 ト をとる。

(5) 以下の文章に「必要条件である」, 「十分条件である」, 「必要十分条件である」, 「必要条件でも十分条件でもない」のうち最も適するものを入れよ。ただし, n は自然数とする。

(i) n が 6 の倍数であることは, n が 3 の倍数であるための チ。

(ii) n が奇数であることは, n^2 が奇数であるための リ。

(計 算 用 紙)

2 数列 $\{a_n\}$ およびその階差数列 $\{b_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = 2a_n + n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、以下の空欄をうめよ。

(1) $b_1 =$ であり、 b_{n+1} を b_n の式で表すと、 $b_{n+1} =$ である。

(2) b_n を n の式で表すと、 $b_n =$ である。

(3) a_n を n の式で表すと、 $a_n =$ である。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

3 座標空間の4点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 2, 0)$, $C(-1, 1, -1)$

を頂点とする四面体がある。辺 AB 上の点 P , 辺 AC 上の点 Q が,

$$AP:PB = CQ:QA = t:(1-t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

をみたすとき、以下の空欄をうめよ。

(1) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ を t を用いて表すと

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \boxed{\text{イ}}$$

である。

(2) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ は, $t = \boxed{\text{ロ}}$ のとき, 最大値 $\boxed{\text{ハ}}$ をとる。

(3) $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{OQ}$ のとき, $t = \boxed{\text{ニ}}$ である。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

4 n を自然数とすると、以下の問いに答えよ。

(1) 白玉 4 個、赤玉 3 個が入っている袋から、2 個の玉を同時に取り出すとき、白玉と赤玉が 1 個ずつ出る確率を求めよ。 イ

(2) 白玉 4 個、赤玉 n 個が入っている袋から、2 個の玉を同時に取り出すとき、白玉と赤玉が 1 個ずつ出る確率 p_n を求めよ。 ロ

(3) $p_n > p_{n+1}$ をみたす n の範囲を求めよ。 ハ

(4) p_n が最大となる n をすべて求めよ。 ニ

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

5 関数 $y = xe^{-x}$ のグラフを C とするとき、以下の問いに答えよ。(結論に至る過程も記述すること。)

- (1) 関数 $y = xe^{-x}$ の増減、極値、 C の凹凸、変曲点を調べて、増減表をつくり、 C を座標平面上に描け。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ を用いてもよい。
- (2) C の変曲点における接線を l とする。 l と x 軸の交点を求めよ。
- (3) C と l と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)

6

 n を自然数とすると、以下の問いに答えよ。

- (1) 次の等式を示せ。

$${}_{n+2}C_3 + {}_{n+2}C_2 = {}_{n+3}C_3$$

- (2) (1)の結果を利用して、数学的帰納法により、次の等式を証明せよ。

$$\sum_{i=1}^n i+1 C_2 = {}_{n+2}C_3$$

(計 算 用 紙)

(計 算 用 紙)