

1

【解答】

- (1) (i) イ $\frac{9e^{10}+1}{100}$
- (ii) ロ $\frac{2}{\pi}$
- (iii) ハ $-1024+1024i$
- (2) ニ 31
- (3) ホ $\log_2 3$
- (4) ヘ $\frac{\pi}{3}$ ト $\frac{7}{2}$
- (5) チ 5 リ 9

【解説】

(1)(i)

部分積分法を用いて、与えられた式を計算すると、

$$\begin{aligned}\int_1^e x^9 \log x dx &= \left[\frac{1}{10} x^{10} \log x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{10} x^{10} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{e^{10}}{10} - \left[\frac{1}{100} x^{10} \right]_1^e \\ &= \frac{9e^{10}+1}{100}\end{aligned}$$

が得られる。

(ii)

区分求積法を用いて与えられた式を計算すると、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{n}\right) \\ &= \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \\ &= \left[\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

が得られる。

(iii)

$(-1+i)^2$ を計算すると、

$$\begin{aligned}(-1+i)^2 &= (-1)^2 - 2i + i^2 \\ &= -2i\end{aligned}$$

が得られる。したがって、 $(-1+i)^{21}$ を計算すると

$$\begin{aligned}(-1+i)^{21} &= \left\{(-1+i)^2\right\}^{10} \cdot (-1+i) \\ &= (-2i)^{10} \cdot (-1+i) \\ &= 1024 \cdot (i^2)^5 \cdot (-1+i) \\ &= -1024 + 1024i\end{aligned}$$

が得られる。

(2)

1333, 1147をそれぞれ素因数分解すると、

$$\begin{aligned}1333 &= 31 \cdot 43 \\ 1147 &= 31 \cdot 37\end{aligned}$$

であるから、最大公約数は31である。

(3)

$t > 0$ の実数 t を用いて $t = 2^x$ とおくと、与えられた式は

$$\begin{aligned}8^x + 4^x &= 9 \cdot 2^x + 9 \\ \Leftrightarrow t^3 + t^2 &= 9t + 9\end{aligned}$$

と表せる。これを解くと、

$$\begin{aligned}t^3 + t^2 &= 9t + 9 \\ \Leftrightarrow t^2(t+1) - 9(t+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (t^2-9)(t+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-3)(t+3)(t+1) &= 0 \\ \therefore t &= 3 \quad (\because t > 0)\end{aligned}$$

が得られる。したがって、

$$\begin{aligned}2^x &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= \log_2 3\end{aligned}$$

となる。

(4)

$-1 \leq t \leq 1$ の実数 t を用いて $t = \cos x$ とおくと、与えられた式は

$$\begin{aligned}y &= 2\sin^2 x + 2\cos x + 1 \\ &= 2(1 - \cos^2 x) + 2\cos x + 1 \\ &= -2t^2 + 2t + 3 \\ &= -2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}\end{aligned}$$

が得られる。 $-1 \leq t \leq 1$ であるから、最大値は $\frac{7}{2}$ であり、そのとき $t = \frac{1}{2}$ である。したがって、

$0 \leq x \leq \pi$ であるから

$$\begin{aligned}t &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \cos x &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

が得られる。

(5)

$|\overline{BC}| = \sqrt{13}$ を変形していくと、

$$\begin{aligned}|\overline{BC}| &= \sqrt{13} \\ \Leftrightarrow |\overline{AC} - \overline{AB}| &= \sqrt{13} \\ \Leftrightarrow |\overline{AC} - \overline{AB}|^2 &= 13 \\ \Leftrightarrow |\overline{AC}|^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC} + |\overline{AB}|^2 &= 13 \\ \Leftrightarrow 36 - 2 \cdot 24 + |\overline{AB}|^2 &= 13 \\ \therefore |\overline{AB}| &= 5\end{aligned}$$

が得られる。また、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 \cdot |\overline{AC}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{5^2 \cdot 6^2 - 24^2} = 9$$

となる。

〔解答〕

$$(1) \quad \text{イ} \quad \frac{3}{64}$$

$$(2) \quad \text{ロ} \quad \frac{1}{8}$$

$$(3) \quad \text{ハ} \quad \frac{71}{512}$$

$$(4) \quad \text{ニ} \quad \frac{25}{32}$$

〔解説〕

(1)

3回の試行後にPが(2, 1)にある確率は、青玉を2回、黒玉を1回引いた場合であるから、

$${}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$$

となる。

(2)

3回の試行後にPがy軸上にある確率は、白玉もしくは黒玉のみを引く場合であるから、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

となる。

(3)

OP=5となるようなPの座標は、(5, 0), (4, 3), (3, 4), (0, 5)である。5回の試行後にPが(5, 0)にいる確率は、青玉のみを引く場合であるから、

$$\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

である。対称性より、(0, 5)にいる確率も同じである。次に、5回の試行後にPが(4, 3)にいる確率は、「赤玉を2回、黒玉を3回」もしくは「赤玉を1回、青玉を2回、白玉を1回、黒玉を1回」引く場合であるから、

$${}_5C_2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + {}_5C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{70}{4^5}$$

である。対称性より、(3, 4)にいる確率も同じである。以上より、求める確率は

$$2 \cdot \left(\frac{1}{4^5} + \frac{70}{4^5}\right) = \frac{71}{512}$$

である。

(4)

最もx+yが小さくなるのは、全ての試行でx, y方向に1ずつ進む場合で、最もx+yが大きくなるのは、全ての試行でx, y方向に2ずつ進む場合である。したがって、

$$5 \leq x+y \leq 10$$

が成立している。ここで、x+y=5, 10となる確率はそれぞれ

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$

である。5回の試行後にx+y=9となる確率は、赤玉と白玉を合計4回、青玉と黒玉を合計1回引く場合であるから、

$${}_5C_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}$$

である。以上より、求める確率は

$$1 - \left(2 \cdot \frac{1}{32} + \frac{5}{32}\right) = \frac{25}{32}$$

となる。

【解答】

$$(1) \quad \text{イ} \quad -1 \qquad \text{ロ} \quad 2$$

$$(2) \quad \text{ハ} \quad \pi - 2$$

$$(3) \quad \text{ニ} \quad (2\log 2 - 1)\pi$$

【解説】

(1)

$1+x^2 > 0$ であるから、与えられた等式の両辺に $1+x^2$ をかけると

$$\begin{aligned} \frac{1-x^2}{1+x^2} &= a + \frac{b}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow 1-x^2 &= a(1+x^2) + b \\ \Leftrightarrow (a+1)x^2 + (a+b-1) &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。これが x についての恒等式であるから、

$$\begin{cases} a+1=0 \\ a+b-1=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (a, b) = (-1, 2)$$

が得られる。

(2)

(1)の結果より、 $y = \frac{2}{1+x^2} - 1$ を微分すると、

$$y' = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

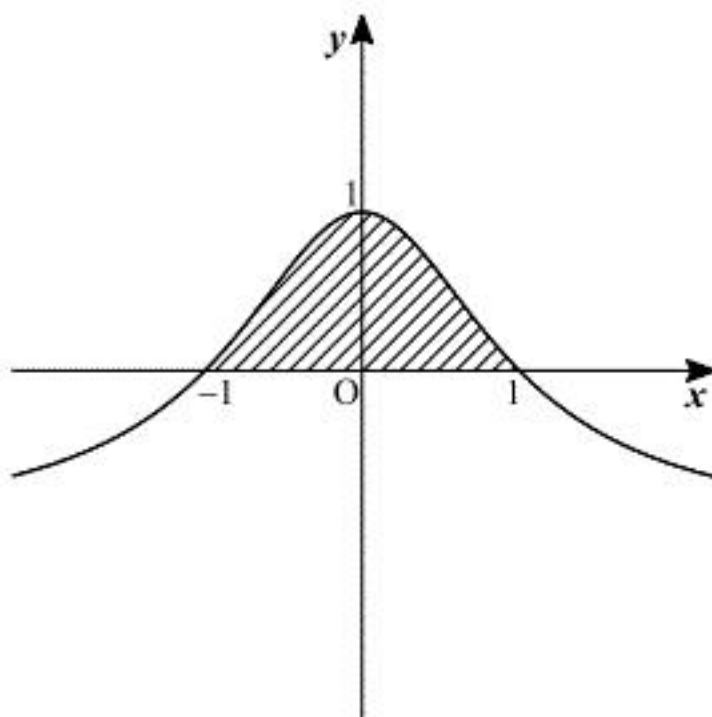
が得られる。分母は常に正であるから、 y' の符号は $-4x$ に従う。したがって、増減表は以下のようになる。

x	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	1	↘

また、 $y = \frac{2}{1+x^2} - 1$ と x 軸との交点の座標は

$$\begin{aligned} \frac{2}{1+x^2} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 1+x^2 &= 2 \\ \therefore x &= \pm 1 \end{aligned}$$

であるから、グラフを描くと以下のようになり、求める面積は図の斜線部である。



以上より、求める面積は

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{2}{1+x^2} - 1 \right) dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x^2} - 1 \right) dx$$

と表せる。ここで、 $x = \tan \theta$ とおくと、 $x: 0 \rightarrow 1$ のとき、 $\theta: 0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$ であり、

$$dx = \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

となるから、置換積分をすると

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x^2} - 1 \right) dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) d\theta - 2 \int_0^1 dx \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta - 2 \\ &= \pi - 2 \end{aligned}$$

が得られる。

(3)

$y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ を式変形すると、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1-x^2}{1+x^2} \\ \Leftrightarrow y(1+x^2) &= 1-x^2 \\ \Leftrightarrow (y+1)x^2 &= 1-y \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{1-y}{y+1} \quad (\because y > -1) \end{aligned}$$

が得られる。したがって、求める体積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \pi x^2 dy &= \pi \int_0^1 \frac{1-y}{y+1} dy \\ &= \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{y+1} - 1 \right) dy \\ &= \pi \left[2 \log |y+1| - y \right]_0^1 \\ &= (2\log 2 - 1)\pi \end{aligned}$$

となる。