

平成 28 年度 入学試験問題

数 学

【注意事項】

- 1 係員の指示があるまで、問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は 12 ページ、解答用紙は 4 枚あります。
- 3 落丁、乱丁、印刷の不鮮明な箇所などがあったときは、手を挙げて係員に申し出ること。
- 4 各解答用紙(4 枚)の受験番号欄に受験番号を数字で記入すること。
- 5 解答は必ず各問題別の解答用紙の所定の欄に記入すること。
- 6 問題冊子の余白等は適宜利用してかまいませんが、どのページも切り離してはいけません。
- 7 試験終了時刻まで退室してはいけません。
- 8 解答用紙は持ち帰ってはいけません。その他は持ち帰ること。

◇M2(502—31)

1 (1)の問いに答えよ。また、(2)から(5)の空欄をうめよ。

(1) 次の計算をせよ。ただし、 i は虚数単位である。

(i) $\int_1^e x^9 \log x \, dx =$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) =$

(iii) $(-1+i)^{21} =$

(2) 1333 と 1147 の最大公約数は である。

(3) 方程式 $8^x + 4^x = 9 \times 2^x + 9$ の解は $x =$ である。

(4) $0 \leq x \leq \pi$ において関数 $y = 2 \sin^2 x + 2 \cos x + 1$ は
 $x =$ のとき、最大値 をとる。

(5) $\triangle ABC$ において、 $|\vec{AC}| = 6$ 、 $|\vec{BC}| = \sqrt{13}$ 、 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 24$ であるとき、
 $|\vec{AB}| =$ であり、 $\triangle ABC$ の面積は である。

(計 算 用 紙)

◇M2(502—32)

- 2 袋の中に、赤玉、青玉、白玉、黒玉が1つずつ、全部で4つ入っている。この袋から玉を1つ取り出して、また袋に戻す試行を繰り返す。座標平面上を動く点Pがはじめ原点Oにあり、試行のたびに、次の規則に従って動くものとする。

- ・赤玉が出たとき、Pはx軸の正の向きに2だけ進む。
- ・青玉が出たとき、Pはx軸の正の向きに1だけ進む。
- ・白玉が出たとき、Pはy軸の正の向きに2だけ進む。
- ・黒玉が出たとき、Pはy軸の正の向きに1だけ進む。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 試行を3回繰り返した結果、Pが点(2,1)にある確率を求めよ。

イ

- (2) 試行を3回繰り返した結果、Pがy軸上にある確率を求めよ。

ロ

- (3) 試行を5回繰り返した結果、 $OP = 5$ となる確率を求めよ。

ハ

- (4) 試行を5回繰り返した結果、Pが不等式 $6 \leq x + y \leq 8$ の表す領域にある確率を求めよ。

ニ

(計 算 用 紙)

- 3 関数 $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ のグラフとx軸によって囲まれた部分をAとする。このとき、以下の空欄をうめよ。

- (1) 等式 $\frac{1-x^2}{1+x^2} = a + \frac{b}{1+x^2}$ が、xについての恒等式となるように定数a, b

を定めると、 $a =$ イ , $b =$ ロ である。

- (2) Aの面積は ハ である。

- (3) Aをy軸のまわりに1回転してできる立体の体積は ニ である。

(計 算 用 紙)

4 曲線 $y = e^{-x}$ を C とし、 n を自然数とする。このとき、以下の空欄をうめよ。

(1) 曲線 C 上の点 $P(t, e^{-t})$ における接線が x 軸と交わる点を Q とする。点 Q の x 座標は である。

(2) 一般に、曲線 C 上の点 P_n が与えられたとき、この点 P_n における接線が x 軸と交わる点を Q_n とし、点 Q_n を通り、 x 軸に垂直な直線と曲線 C の交点を P_{n+1} とする。 $P_1(0, 1)$ から出発して、 $Q_1, P_2, Q_2, \dots$ のように点をとる。このとき、点 Q_n の x 座標は である。

(3) 曲線 C 、直線 $P_n Q_n$ および直線 $Q_n P_{n+1}$ で囲まれた部分の面積を S_n とする。このとき、 $S_n =$ である。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} S_n =$ である。

(計 算 用 紙)

5 平面上に平行四辺形 $ABCD$ がある。辺 AB の中点を E とし、辺 BC 、辺 CD 、辺 DA それぞれを $1:2$ に内分する点を順に F, G, H とする。線分 EG と線分 FH の交点を I とする。 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とおくと、以下の問いに答えよ。
(結論に至る過程も記述すること。)

(1) $EI:IG = t:(1-t)$ とおくと、 $\overrightarrow{AI}$ を $\vec{b}, \vec{d}, t$ を用いて表せ。

(2) $HI:IF = u:(1-u)$ とおくと、 $\overrightarrow{AI}$ を $\vec{b}, \vec{d}, u$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{AI}$ を $\vec{b}, \vec{d}$ を用いて表せ。

(計 算 用 紙)

- 6 n を自然数とする。関数 $f(x) = e^x \sin x$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ について、次の等式がなりたつことを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$$

(計 算 用 紙)